管水路系における非定常流れの解析法について(1)

広島大学工学部　正員　常松 芳昭

1．まえがき

各種の用水供給のための管水路系においては，需要水量に見合った適切な流量管理が要求される特色がある。このような系においては定常水理現象よりもむしろ非定常流れが実際上重要な問題となる。しかし，系が複雑になると従来の分布型モデルに基づく水理解析法はきわめて煩雑になる欠点がある。また，場合によっては水の圧縮性を考慮する必要も生じるなど，この種の問題の取扱い法は一般に複雑である。このような観点から，本研究では，まず初めの段階として，緩慢に変動する非圧縮性流体の流れを対象とし，グラフ理論の応用によって，複雑なトリー型の長大な幹線管水路系の簡単かつ統一的な応答解析法の展開を試みたものである。

2．管水路非定常流れの基礎方程式

単一管路における非圧縮性流体の非定常流の基礎方程式は次に示す連続式とエネルギー式より構成される。

$$q = v \cdot a \quad \text{----(1)} \qquad \frac{\beta}{g}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z\right) + \frac{\partial h_L}{\partial x} = 0 \quad \text{----(2)}$$

ここに，v：断面平均流速，a：管断面積，q：流量，p：流体圧，z：基準面より管軸までの高さ，h_L：摩擦損失水頭，ρ：密度，g：重力の加速度，α：エネルギー補正係数，β：運動量補正係数，t：時間，x：距離である。エネルギー位をΦで表わし，抵抗則にDarcy−Weisbachの式を用いると

$$\Phi = \frac{\alpha v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \quad \text{----(3)} \qquad \frac{\partial h_L}{\partial x} = f\frac{1}{D}\frac{v^2}{2g} \quad \text{----(4)}$$

f：摩擦損失係数，D：管の直径

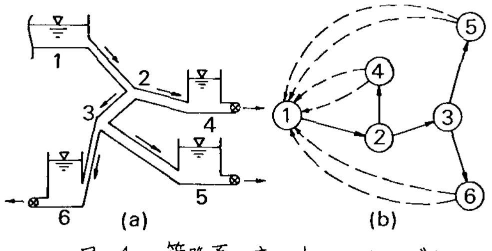
であるから，断面1から断面2まで一様管路の長さlにわたって式(2)を積分すれば，次式がえられる。

$$\Phi_1 = \Phi_2 + H + L\frac{dq}{dt} \quad \text{----(5)} \qquad H = K|q|q \quad \text{-----(6)} \qquad L \equiv \frac{\beta l}{ga}, \quad K \equiv f\frac{l}{Da^2}\frac{1}{2g}$$

式(1)，(5)および(6)は一様管路よりなる管水路系における緩慢な非定常流れの解析の基礎となるものである。

3．トリー型管路系のトポロジー・モデル

一般に，集中型の物理系はトポロジー・モデルとしての有向グラフによって巧妙に表現されるが，管水路系もこの例外ではない。長大な幹線管水路系はループを含まないいわゆるトリー・システムである場合が多いので，ここでは簡単のため図−1(a)のような1個の水源貯水槽(ソース)からいくつかの末端調圧水槽(シンク)までのトリー型送水管系を対象にして考える。いま，これは一般的に$(n+1)$個の節点とe'本の枝とから成るトリーで表現され，ソース・ノードは唯1個，シンク・ノードはm個あるものとしよう。明らかに，$e'=n$である。ところで，末端水槽から系外へ流出する流量Qは通常バルブなどによって調節されるので，Qは水槽水位の関数と考えてよい。また，水槽断面積Sは管路断面積に比べて十分に大きいものとすれば，水槽水位はエネルギー位に近似的に等しいとみてよい。したがって，末端水槽に対する連続条件式を考慮すれば，シンク・ノードに対する境界流量として$S\cdot\dot{\Phi}$とQの二つが存在することが分る。そこで，トリーの各シンク・ノードからそれぞれ二本のソース・ノードへ向かう有向枝を新たに付加し，その枝の上で$S\cdot\dot{\Phi}$とQを定義することにすれば，質量保存の点に関して，もとのトリー型の開放系は保存系としてのネットワーク・モデルに変換される(図−1(b))。



図−1　管路系とネットワーク・モデル

以下においては，行列とベクトルについて，グラフの木と補木に関する成分をそれぞれ添字T，Cによって区別する。

また，議論を簡単にするため，次のように記号を定義しておく。A：有向接続行列，A^*：Aの転置行列，B：有向原始ループ行列，$\mathbf{q}$：管路流量の列ベクトル，q：流量の対角行列，$\dot{\mathbf{q}}$：流量の時間微分の列ベクトル，E：単位行列，$\mathbb{H}$：管路の損失水頭の列ベクトル，$\boldsymbol{\Phi}$：エネルギー位の列ベクトル，L：各管路の$\beta l/ga$を表わす対角行列，K：各管路の$f\cdot l/2gDa^2$を表わす対角行列。保存系としてのグラフを張る木にもとの開放系に対応するトリーの部分を選ぶことにすれば，システム・モデルは式(1)，(5)および(6)に基づいてえられ，次のようになる。

エネルギー方程式系　：　$L(e',e')\dot{\mathbf{q}}_T(e') - A_T^*(e',n+1)\boldsymbol{\Phi}(n+1) + K(e',e')|q_T(e',e')|\mathbf{q}_T(e') = \mathbb{O}(e')$　----(7)

流量保存則　：　$A(n+1,e'+2m)\mathbf{q}(e'+2m) = \mathbb{O}(n+1)$　----(8)

さらに，ネットワークに対しては次の関係も成立しなければならない。

$A^*(e'+2m,n+1)\boldsymbol{\Phi}(n+1) = \mathbb{H}(e'+2m)$　---- (9)　　$B(2m,e'+2m)\mathbb{H}(e'+2m) = \mathbb{O}(2m)$　---- (10)

4．応答解析法の定式化

理論的展開を容易にするため，グラフの節点と枝に関する番号付けは次に述べる規則にしたがってなされているとする。すなわち，i：節点番号変数，j：枝番号変数とすれば，まず，木の部分グラフにおいて，i)ソースノードは$i=1$，ii)中間ノードのうち，ソースに隣接する節点は$i=2$，その他のものは$i=3,4,\cdots,n-m+1$ iii)シンク・ノードは$i=n-m+k+1$，$(k=1,2,\cdots,m)$，iv)節点iへの流入枝は$j=i-1$，$(i=2,3,\cdots,n+1)$，つぎに補木の部分グラフにおいて，v)節点1への流入枝はその流出節点iに対応して，$j=i+m-1$および$i+2m-1$とする。以上の番号付けの規則の下では，各種の行列とベクトルは次のようにそれぞれ部分行列と部分列ベクトルに分割して表現することができる。

$$A=\begin{pmatrix} A_{T11}(1,e'-m) & 0(1,m) & A_{C11}(1,m) & A_{C12}(1,m) \\ A_{T21}(n-m,e'-m) & A_{T22}(n-m,m) & 0(n-m,m) & 0(n-m,m) \\ 0(m,e'-m) & -E(m,m) & E(m,m) & E(m,m)\end{pmatrix},\quad B_T=\begin{pmatrix} B_{T1}(m,e') \\ B_{T2}(m,e')\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Phi}=\begin{pmatrix}\Phi_1 \\ \boldsymbol{\Phi}_2(n-m) \\ \boldsymbol{\Phi}_3(m)\end{pmatrix},\quad \mathbf{q}=\begin{pmatrix}\mathbf{q}_{T1}(e'-m) \\ \mathbf{q}_{T2}(m) \\ \mathbf{q}_{C1}(m) \\ \mathbf{q}_{C2}(m)\end{pmatrix},\quad \mathbb{H}=\begin{pmatrix}\mathbb{H}_{T1}(e'-m) \\ \mathbb{H}_{T2}(m) \\ \mathbb{H}_{C1}(m) \\ \mathbb{H}_{C2}(m)\end{pmatrix}$$

式(7)に式(9)のうちの木に関する式を適用し，さらに，枝の番号付けの規則により$B_{T1}=B_{T2}$なることを考慮すれば，式(7)に等価な式として次式がえられる。

$$B_{T1}(m,e')L(e',e')\dot{\mathbf{q}}_T(e') = B_{T1}(m,e')\mathbb{H}_T(e') - B_{T1}(m,e')K(e',e')|q_T(e',e')|\mathbf{q}_T(e') \qquad \text{-----(11)}$$

また，式(10)は$B_{T1}=B_{T2}$なることにより$\mathbb{H}_{C1}=\mathbb{H}_{C2}$の関係も成立することを意味しており，式(10)に等価な式として

$$B_{T1}(m,e')\mathbb{H}_T(e') + \mathbb{H}_{C1}(m) = \mathbb{O}(m) \qquad \text{-----(12)}$$

が書かれる。一方，式(8)より，木の流量はシンク・ノードへの流入流量によって次のように表わされる。

$$\mathbf{q}_T(e') = \begin{pmatrix} -A_{T21}^{-1}(n-m,e'-m)A_{T22}(n-m,m) \\ E(m,m)\end{pmatrix}\mathbf{q}_{T2}(m) \qquad \text{-----(13)}$$

式(11)，(12)および(13)より，管路系の末端管路流量の支配方程式が求められ，次のようになる。

$$\dot{\mathbf{q}}_{T2}(m) = -(L')^{-1}\mathbb{H}_{C1}(m) - (L')^{-1}K'\mathbf{q}_{T2}(m) \qquad \text{-----(14)}$$

ここに，$L'(m,m) = B_{T1}(m,e')L(e',e')\begin{pmatrix} -A_{T21}^{-1}A_{T22} \\ E\end{pmatrix}$，　$K'(m,m) = B_{T1}(m,e')K(e',e')|q_T(e',e')|\begin{pmatrix} -A_{T21}^{-1}A_{T22} \\ E\end{pmatrix}$

ところで，シンク・ノードiに対して，一般に$q_{i+m-1} \fallingdotseq C_i f_i(\Phi_i)$の関係があるから，$C_i$を一定と仮定すれば，これは$\mathbf{q}_{C1}(m) = C(m,m)\mathbf{f}(\boldsymbol{\Phi}_3(m))$で表現できる。また，$\mathbf{q}_{C2}(m) = S(m,m)\dot{\boldsymbol{\Phi}}_3(m)$であるから，シンク・ノードに対する連続の条件式は次のように書かれる。但し，C：C_iを表わす対角行列，S：末端水槽の断面積を表わす対角行列。

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}_3(m) = S^{-1}(m,m)\mathbf{q}_{T2}(m) - S^{-1}(m,m)C(m,m)\mathbf{f}(\boldsymbol{\Phi}_3(m)) \qquad \text{-----(15)}$$

5．むすび

式(14)および(15)は系の未知量$\mathbf{q}_{T2}$と$\boldsymbol{\Phi}_3$に関する式であり，行列とベクトルによって統一的に定式化されている。しかし，このシステム・モデルは非線形であるため，系の厳密な応答解析は与えられた初期条件の下での数値積分によらざるをえない。えられたモデルのもつ数値計算上の特質などの問題は今後の検討課題として残されている。