

1 まえかき

周期性荷重を受ける骨組構造物は、構造物の変形が大きい場合、付随振振動も起し、弾性安定性の調査は付随振振動の安定性と調へることに帰着する。この付随振振動の主な不安定現象としては *Subharmonic resonance* と *Combination resonance* があり、これらについて、これまで多くの研究がなされている。構造物および荷重の種類により前者だけしか生じない場合と両者が同程度生じる場合がある。著者の一人、倉田は一定方向周期性荷重を受ける骨組構造物の動的弾性安定性の解析法を¹⁾発表しているが、本研究は荷重の作用方向が構造物の変形にもなって変化する周期性従動荷重が作用する場合の動的弾性安定性の解析を試みたものである。安定あるいは不安定の判定には、摂動法を用い近似的に求められた H_{eff} の不安定条件²⁾を適用した。

2. 運動方程式

初めに、非周期性荷重の大きさおよび周期性荷重の振幅あるいは振動数の大きい安定領域の境界近傍のある値ととり安定振動状態にある場合と想定する。次に、これらの諸値の微小変化により不安定領域に入り不安定振動状態になった場合と想定し、不安定状態の節々の運動方程式を骨組構造物の変形後の節々の動的つり合い式より求める。集中質量系の微小振幅時(安定状態)の運動方程式は次式で表わされる。

$$W_i \frac{d^2 \bar{d}_i}{dt^2} = - \sum_j T_{ij} (f_i, f_j, \alpha_{ij}) N'_{ij} (\bar{d}_i, \bar{d}_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) - \bar{P}_i \sin \omega t \quad (1)$$

ここで、 W_i は節々 i の質量マトリックス、 T_{ij} は座標変換マトリックス、 N'_{ij} は部材 ij の i 端における局部座標系での材端力ベクトル、 $\bar{P}_i \sin \omega t$ は節々 i に作用する周期性荷重、 $\bar{d}_i$ は同節々の周期性荷重による変位ベクトル、 f_i は i 点の座標ベクトル、 α_{ij} は部材 ij の部材断面主軸の回転角である。

有限振幅時(不安定状態)の運動方程式は変位増加量 $\Delta \bar{d}_i$ とすると近似的に次式で表わされる。

$$W_i \frac{d^2 (\bar{d}_i + \Delta \bar{d}_i)}{dt^2} = - \sum_j T_{ij} (f_i + \Delta f_i, f_j + \Delta f_j, \alpha_{ij} + \Delta \alpha_{ij}) N'_{ij} (\bar{d}_i + \Delta \bar{d}_i, \bar{d}_j + \Delta \bar{d}_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) - \bar{P}_i \sin \omega t - \varepsilon_i A_i^{(3)} \bar{P}_i \sin \omega t \quad (2)$$

変位増加量 $\Delta \bar{d}_i$ を新たに d_i とし、実荷重 $\bar{P}_i$ は基準荷重の $\bar{P}$ 倍とし、基準荷重作用時の材端力ベクトルと N'_{ij} とすると、 d_i に関する下記の方程式は、式(1)と(2)より得られる。

$$W_i \frac{d^2 d_i}{dt^2} = - \sum_j T_{ij} (f_i, f_j, \alpha_{ij}) N'_{ij} (d_i, d_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) - \bar{P} \sin \omega t \sum_j \{ H_{ij} (f_i, f_j, \alpha_{ij}, \tilde{N}'_{ij}) d_i + H_{ij} (f_i, f_j, \alpha_{ij}, \tilde{N}'_{ij}) d_j \} - \varepsilon_i \tilde{B}_i \sin \omega t d_i \quad (3)$$

上式中、 ε_i は従動度を表わすパラメータであり、上式は構造物の各節々に適用すると、次の周期係数をもつ微分方程式が得られる。

$$W \frac{d^2 d}{dt^2} + \bar{P} \sin \omega t (K_2 + K_5) d + K_1 d = 0 \quad (4)$$

K_1 は剛性行列、 K_2 は周期性基準荷重作用時の初期応力マトリックス、 K_5 は対角線上に $\tilde{B}_i$ が並んだマトリ

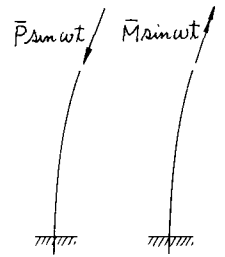


Fig. 1

77 スである。上式(4)の解により安定、不安定の判別を行なう。

3. Han の不安定条件²⁾

本研究に示すような周期力を受ける非減衰有限自由度系の正則化エルク運動方程式は次の形で表わし得る。

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + (B^{(0)} + \delta D \cos \omega t) X = 0 \quad (5) \quad \text{ここで、} \delta \text{ は正の微小パラメータ、} X \text{ は} x_1, x_2, \dots$$

x_n よりなるベクトル、 $B^{(0)}$ はすなわちこの要素が正である対角マトリックスで、その対角要素は、上式において $\delta=0$ のときの固定振動数の二乗 $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ となる。ただし、 $\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$ 、 D は要素が d_{jk} であるような正マトリックスである。

この場合、励振振動数 ω が系の固有振動数のある組合せに近いとき、すなわち、次の条件を満たす範囲に ω があるとき、共振を起し不安定になることが明らかにされている。

$$\omega = \omega_k + \omega_l + \delta \lambda \quad (\omega_k + \omega_l) - \frac{\delta}{2} \sqrt{\frac{d_{kk} d_{ll}}{\omega_k \omega_l}} < \omega < (\omega_k + \omega_l) + \frac{\delta}{2} \sqrt{\frac{d_{kk} d_{ll}}{\omega_k \omega_l}} \quad (6)$$

(k 次モードと l 次モードの和形係数励振不安定領域)

$$\omega = 2\omega_k + \delta \lambda \quad 2\omega_k - \frac{\delta}{2} \frac{|d_{kk}|}{\omega_k} < \omega < 2\omega_k + \frac{\delta}{2} \frac{|d_{kk}|}{\omega_k} \quad (7)$$

(k 次モードの主不安定領域)

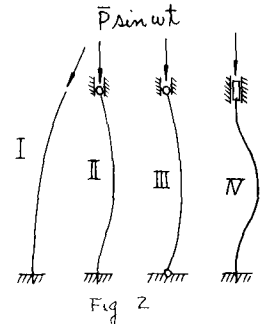
$$\omega = \omega_l - \omega_k + \delta \lambda \quad (\omega_l - \omega_k) - \frac{\delta}{2} \sqrt{\frac{-d_{kk} d_{ll}}{\omega_k \omega_l}} < \omega < (\omega_l - \omega_k) + \frac{\delta}{2} \sqrt{\frac{-d_{kk} d_{ll}}{\omega_k \omega_l}} \quad (8)$$

(l 次モードと k 次モードの差形係数励振不安定領域)

4. 適用例

(柱の不安定領域) 柱長 60 cm, 断面 40 x 20 mm のアルミニウム柱の、Fig. 2 に示す四種類の柱の不安定領域 $a - b \bar{P}/P_* < \omega/2\omega_2 < a + b \bar{P}/P_*$ で表わし、 k とする a および b 値を下表に示す。

柱の種類 不安定領域 の $\omega/2\omega_2$	Case I		Case II		Case III		Case IV	
	$P_{*k} = 10.48^{kg}$		$P_* = 10.80$		$P_* = 5.230$		$P_* = 21.46$	
	$\omega_2 = 1740^{rad/sec}$		$\omega_2 = 398.9$		$\omega_2 = 315.7$		$\omega_2 = 491.8$	
	a	b	a	b	a	b	a	b
一次モードの主不安定領域	0.163	0.058	0.313	0.076	0.253	0.063	0.368	0.089
二次モードの主 "	10	0.132	10	0.084	10	0.061	10	0.116
一と二次モードの和形 "	0.418*	0.124	0.656	0.015	—	—	—	—
一と三次モードの "	1.445	0.106	1.178	0.010	—	—	1.143	0.034



* 一と二次の差形不安定、 $\bar{P}$ 荷重振幅 P_* 臨界荷重

(面外変形アーチの不安定領域) スパ: 100 cm で断面 40 x 20 mm の面外変形の卓越する両端固定アーチについて、ライスが 20, 40, 60, 80 および 100 cm の場合、鉛直下向きの運動荷重を受けるときの不安定領域 $c - d \bar{P}/P_* < \omega/2\omega_2 < c + d \bar{P}/P_*$ で表わし、係数を下表に示す。表中* 和形領域、 P_{*k} 臨界荷重を示す。

アーチの種類 不安定領域 の $\omega/2\omega_2$	ライス = 20 cm		ライス = 40 cm		ライス = 60 cm		ライス = 80 cm		ライス = 100 cm	
	$P_{*k} = 1.311^{kg}$		$P_{*k} = 2.602$		$P_{*k} = 2.088$		$P_{*k} = 1.975$		$P_{*k} = 0.9538$	
	$\omega_2 = 141.9^{rad/sec}$		$\omega_2 = 63.32$		$\omega_2 = 59.13$		$\omega_2 = 41.27$		$\omega_2 = 30.81$	
	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d
一次モードの主不安定領域	0.353	0.086	0.342	0.053	0.305	0.027	0.283	0.064	0.264	0.078
二次モードの主 "	10	0.148	10	0.252	10	0.235	10	0.191	10	0.164
一と二次モードの和差形 "	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
一と三次モードの差形 "	1.155*	0.034	0.891	0.124	0.793	0.195	0.734	0.203	0.684	0.199

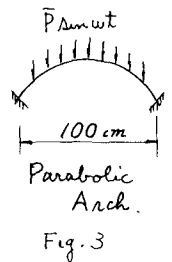


Fig. 3

1) 倉田・坂田・窪田、土木学会論文報告書、No. 249, pp. 29~39. 2) Han, C.S.: Journal of Applied Mechanics, Vol. 39, pp. 367~372. 3) 倉田 茂木: 山口大学工学部研究報告, Vol. 26, No. 2, pp. 35~41.