

板の後座屈に関する一研究

阿南高孝 正員 桑山八洲彦

1. まえがき

圧縮力を受ける矩形板は座屈荷重の数倍の荷重によつて崩壊することが知られており、板の座屈後の挙動を調べることが、最適設計上重要な事項となっている。初期不整を持つ板に対する解析解はMarquenneの基礎方程式をGalerkin法を用いて導びくことができるが、式はたわみ係数に関する非線形連立方程式となりこれを数値的に解くということにより実用的とは言えない。Wallaceらはこの点に着目して摂動法を使用して正方形単純支持板の最大膜応力、収縮ひずみ、中央たわみ等について簡略化した式を提案し、耐荷力、不整因子について論議している。しかしここでは対象を非載荷線膜応力を零とした単純支持正方形板に限定しているので厳格的な座屈後挙動を説明しているとは思われない。本研究ではより広範な幾何学的境界条件と力学的境界条件を持つ矩形板に対象を広げ、かつ簡便な式を示し、その精度を既知の研究と比較し、これを用いて耐荷力式を算出する検討を加えた。

2 基礎方程式および解

図-1に示す正方形矩形板の基礎方程式は

$$\nabla^4 F = E \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y^2} \right] \quad (1a)$$

$$\nabla^4 (w - w_0) = \frac{E}{D} \left[\frac{\partial F}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial F}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x \partial y} \right] \quad (1b)$$

式中 w はたわみ、 w_0 は初期不整、 F は応力関数、 E は板厚である。いまたわみ関数、および初期不整関数として次式を与える。

$$w = E \sum_m \sum_n w_{mn} g_m(x) \psi_n(y) \quad w_0 = E \sum_m \sum_n w_{0mn} g_m(x) \psi_n(y) \quad (2)$$

$g_m(x)$ 、 $\psi_n(y)$ については表-1の幾何的境界条件を満足する関数とする。また力学的境界条件は $y = \pm b$ で膜応力が零(Case I)で、また $y = \pm b$ で直線線を保つ(Case II)の条件を付加する。

例えば具体的には

$$\text{Case A} \quad g_m(x) \psi_n(y) = \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \quad (m, n = 1, 3, \dots)$$

$$\text{Case D} \quad g_m(x) \psi_n(y) = \left[(-1)^{m+1} + \cos \frac{m\pi x}{a} \right] \left[(-1)^{n+1} - \cos \frac{n\pi y}{b} \right]$$

	$x = \pm a$ 縁で	$y = \pm b$ 縁で
Case A	$w=0, M_x=0$	$w=0, M_y=0$
Case B	$w=0, M_x=0$	$w=0, \partial w / \partial x = 0$
Case C	$w=0, \partial w / \partial x = 0$	$w=0, M_y=0$
Case D	$w=0, \partial w / \partial x = 0$	$w=0, \partial w / \partial x = 0$

表-1 幾何的境界条件

解を求める過程は式(2)の関数を用いて式(1a)および力学的境界条件を満足する応力関数を定め、式(1b)を近似的に満足させる w_{mn} 、 w_{0mn} に関する式をGalerkin法を用いて求めることができる。方程式は高次非線形連立方程式となる。この方程式を解くとどの境界条件の場合でも座屈振幅(式(2)の w 項)と比較して他の振幅の数値は相当小さな値となること分る。従つて非線形方程式として座屈振幅のみを用いた式としても大差ないものと思える。そこで初期不整項を一般に用いられているように式(2)の第1項のみとした場合の方程式の一般形を式(3)に示す。式中 A_1 、 A_2 、 A_3 は各々の境界条件、寸法比によつて異なるが、正方形板でかつポアソン比を0.316の場合を表-2に示しておいた。

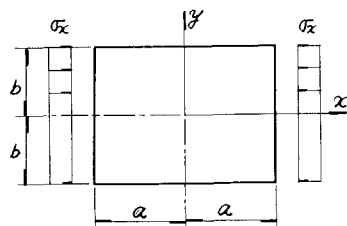


図-1 矩形板の座標

$$A_1 w_{,1} (w_{,1}^2 - w_{0,1}^2) + A_2 (w_{,1} - w_{0,1}) - A_3 \bar{\sigma}_x w_{,1} = 0 \quad (3)$$

		A_1	A_2	A_3
I	A	0.0863	0.3703	1
II	A	0.1250	0.3703	1
I	B	0.9598	0.6249	0.25
II	B	0.5469	0.6249	0.25
I	C	0.4598	0.6249	1
II	C	0.5469	0.6249	1
I	D	9.9514	2.9625	3
II	D	10.660	2.9625	3

式中 $\bar{\sigma}_x = \sigma_x (2b)^2 / \pi^2 E t^2$ である。まず完全板としたときの座屈後挙動を示す簡単な式を導く。因子 $\bar{\lambda}$ を用い、式(3)を $w_{0,1} = 0$ として $\bar{\lambda}$ に關してマクローリン展開を行う。式(3)は

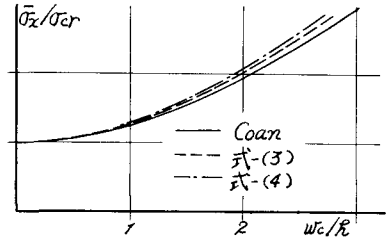
$$(A_2 - A_3 \bar{\sigma}_{cr}) w_{,1} - A_3 \bar{\lambda}^2 \bar{\sigma}_{cr} w_{,1} + A_1 w_{,1}^3 = 0 \quad \bar{\sigma}_x \geq \bar{\sigma}_{cr}$$

いま $\bar{\lambda} = 0$ のとき $w_{,1} = 0$ の条件を用いて 3 回まで微分すると次の結果、表-2 係数 A_1, A_2, A_3 を得る。 $\bar{\sigma}_{cr}$ は座屈応力である。

$$w_{,1}' = (A_3 \bar{\sigma}_{cr} / A_1)^{1/2} \quad w_{,1}'' = 0$$

$$w_{,1} = \frac{\partial w_{,1}}{\partial \bar{\lambda}} \bar{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_{,1}}{\partial \bar{\lambda}^2} \bar{\lambda}^2 + \dots = (A_3 \bar{\sigma}_{cr} / A_1)^{1/2} \bar{\lambda} \quad (4)$$

いま一例として Case I-A については $w_{,1} = 2.0717 (\bar{\sigma}_x / \bar{\sigma}_{cr} - 1)^{1/2}$ となり図-2 に中央たわみ $w_c = w_{,1}$ の結果と式(3)による結果、Coan による値を比較したが、式(4)は充分な精度が保障されていることが分る。他の条件の場合も同様な結論が得られた。図-2 w_c と $\bar{\sigma}_x / \bar{\sigma}_{cr}$ の関係



矩形板の面内膜応力については応力関数から求まり、一般形はたわみ係数の 2 次式で与えられる。最大応力は境界条件の相違によって生ずる位置を異にしているが、縁応力が最大となる。いま同様に $w_{,1}$ のみを未知数として、最大縁応力 $\bar{\sigma}_{emax}$ を求め、さらに式(4)を用いると

$$\frac{\bar{\sigma}_{emax}}{\bar{\sigma}_{cr}} = \frac{\bar{\sigma}_x}{\bar{\sigma}_{cr}} + \frac{B A_3}{A_1} \left(\frac{\bar{\sigma}_x}{\bar{\sigma}_{cr}} - 1 \right) \quad \bar{\sigma}_x \geq \bar{\sigma}_{cr} \quad (5)$$

図-3 に解析解と式(5)を比較したが、大差ないことが分る。次に矩形板につき初期不整を考慮した場合の座屈後挙動を説明する式を考へる。一般に初期不整は座屈点近傍に於いてその影響が大であることが分っているので非線形方程式を式(3)としても差

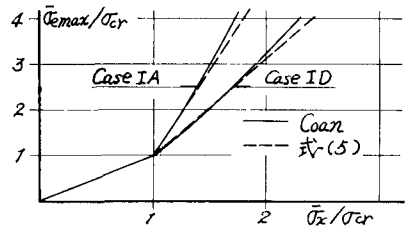


図-3 平均応力と最大縁応力との関係

IA	0.244	IC	1.108
IIA	0.125	IIC	0.625
IB	0.858	ID	3.471
IIB	0.500	IID	2.260

表-3 係数 B

式(3)を用いることにより $\bar{\sigma}_{emax}$ は

$$\frac{\bar{\sigma}_{emax}}{\bar{\sigma}_{cr}} = \frac{\bar{\sigma}_x}{\bar{\sigma}_{cr}} + \frac{B A_3}{A_1} \left(\frac{\bar{\sigma}_x}{\bar{\sigma}_{cr}} - 1 + \frac{w_{0,1}}{w_{,1}} \right) \quad (6)$$

いま $\bar{\sigma}_{emax} = \bar{\sigma}_y = \sigma_y (2b)^2 / \pi^2 E t^2$ のとき崩壊とし、平均応力を $\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_{max}$ とする。又そのとき $w_{,1} = w_{max}$ とすると崩壊時に於ける挙動は式(3)と式(6)を連立させて解くことから調べることが出来る。一例を図-4) に示しておいたが Case I-A については Walker によって与えられた結果と近似している。

3 後記

各種の境界条件を持つ矩形板の座屈後挙動を示す簡単な式を提示し、各条件ともこれらの式が理論値とよく一致することを示した。都合上境界条件と耐荷力等についての考察は講演当日述べる。

4 参考文献

- J. M. Coan ; Journal of Applied Mechanics, June, 1951
R. G. Dawson and A. C. Walker ; ST1, ASCE, January, 1972

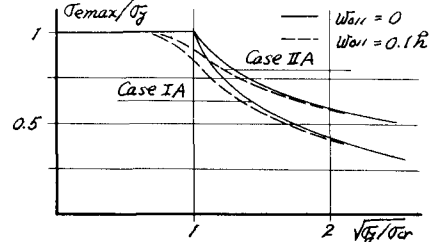


図-4 耐荷力曲線