

円孔を有する正方形板のせん断座屈について

広島大学工学部 正員 上野谷 実

まえがき

有孔板のせん断座屈強度に関する研究は、古くはエネルギー法(Rayleigh-Ritz法)で、最近では有限要素法により数多くなされている。しかしながら最も多くの研究がなされている円孔を有する正方形板の場合でも、円孔径の大きさは正方形板の辺長の約半分以下に限られており、大きい円孔に対する資料が不足している。ここでは図-1に示すように、中心に円孔を有し、周辺で単純支持あるいは固定されている正方形板がせん断を受けるときの弾性初期座屈解析をエネルギー法により $d/l = 0 \sim 0.9$ の範囲について行なう。

解析方法

エネルギー法による板の座屈解析は幾何学的境界条件を満足するたわみ関数(Deflection function)を仮定し、この関数の未定係数を座屈時のポテンシャルエネルギーが最小となるように決定することに帰着する。式で表わせば次のようになる。

$$\delta \frac{D}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy + \delta \lambda \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy = 0 \quad (1)$$

ここに D : 板剛度, w : たわみ関数, ν : ポアソン比, N_x, N_y, N_{xy} : 単位荷重による合成力, λ : 座屈荷重係数
図-1の座標系に対してたわみ関数を次のように仮定する。

$$\begin{aligned} \text{周辺単純支持} \quad w(x, y) = & a_{11} \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l} + a_{22} \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \frac{2\pi y}{l} + a_{13} \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{3\pi y}{l} + a_{31} \cos \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l} \\ & + a_{33} \cos \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi y}{l} + a_{24} \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \frac{4\pi y}{l} + a_{42} \sin \frac{4\pi x}{l} \sin \frac{2\pi y}{l} + a_{44} \sin \frac{4\pi x}{l} \sin \frac{4\pi y}{l} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{周辺固定} \quad w(x, y) = & \cos^2 \frac{\pi x}{l} \cos^2 \frac{\pi y}{l} \left[a_{00} + b_{00} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l} + a_{22} \cos \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2\pi y}{l} + b_{22} \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \frac{2\pi y}{l} \right. \\ & \left. + b_{33} \sin \frac{3\pi x}{l} \sin \frac{3\pi y}{l} + a_{11} \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l} + a_{33} \cos \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi y}{l} + b_{44} \sin \frac{4\pi x}{l} \sin \frac{4\pi y}{l} \right] \quad (3) \end{aligned}$$

仮定したたわみ関数式(2)と(3)の精度は、孔のない正方形板のせん断座屈荷重に対し図-2に示す。これによると、孔のない場合は5項とれば実用的でこれ以上項数を増加しても解の精度はそれほど向上しないことがわかる。しかし孔を有する場合はより複雑な座屈モードになることを考慮し、解析には8項よりなる式(2)と(3)の全項を用いる。

ポテンシャルエネルギーを計算するために必要となる有孔板の応力解析は有限要素法で行なう。用いる要素は要素内一定応力の三角形要素とし、対称性を利用して解析は図-1に示すような要素分割で正方形板の1/4について行なう。式(1)の二重積分はガウスの数値積分法を用い、有限要素の各三角形内に7つの積分点をとっている。

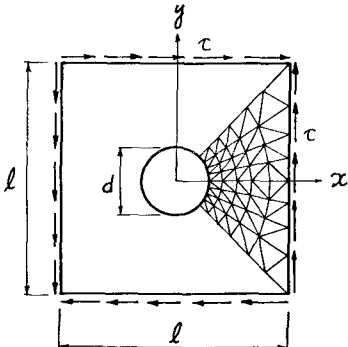


Fig. 1

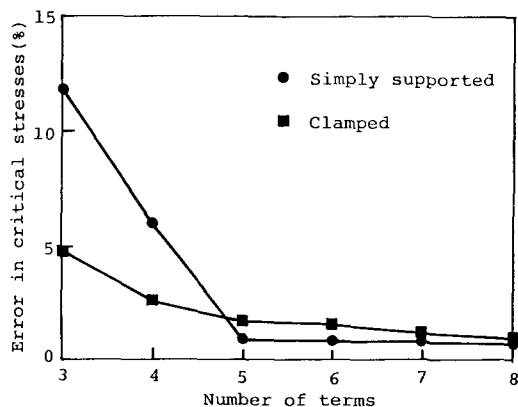


Fig.2 Convergence of stresses with number of terms

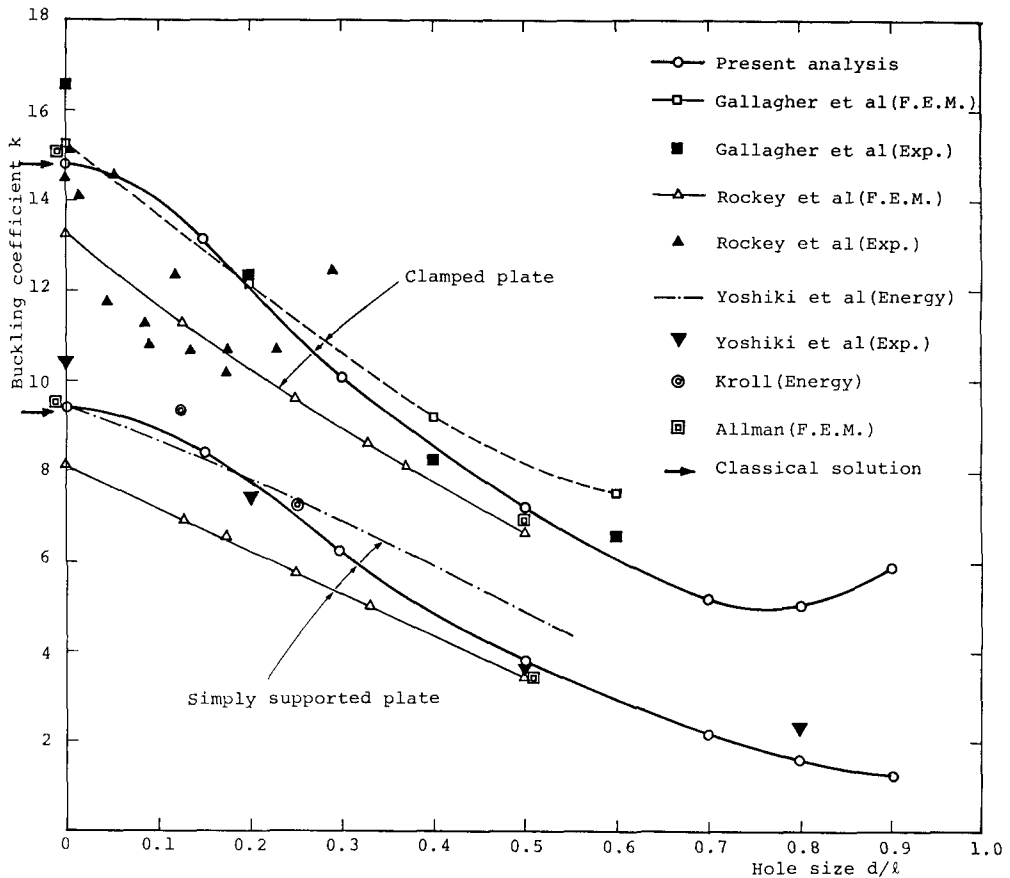


Fig.3 Variation of elastic buckling coefficients with hole size

解析結果および考察

円孔によるせん断座屈強度の変化を図-3に示す。図の縦軸の座屈係数 k は次式で定義される。

$$C_{cr} = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{l}\right)^2 \quad \text{ここに } E: \text{ヤング係数, } t: \text{板厚}$$

Gallagher⁽¹⁾は周辺で固定された板が等分布のせん断変形を受ける場合について、有限要素法による解析および実験を行なっている。本解析法とGallagherの結果と比較すると、小さい円孔の場合良い近似を示すが、大きい円孔の場合、載荷条件の相違による影響が現われ、後者が大きい値を示す。Rockey⁽²⁾は有限要素法を用いて単純支持および固定された板の解析を行っているが、GallagherらやAllman⁽³⁾に比べて自由度の少ない要素を用いたため解の精度はあまり良くない。Kroll⁽⁴⁾は単純支持された板が $d/l=0.125$ と 0.25 の円孔を有する場合をエネルギー法で解いている。本解析よりやや大きい結果を示しているのは数値積分の精度が十分でなかったからと思われる。単純支持の場合、本解析の結果は吉識⁽⁵⁾の実験結果と良い近似を示す。

参考文献

- (1) R.H.Gallagher, et al., ASCE, Vol.102, No.EM6, Dec.1976, pp.1025-1040.
- (2) K.C.Rockey, et al., Symp. on Thin Walled Steel Structures, University College of Swansea, 1967.
- (3) D.L.Allman, Int. J. Num. Meth. Engng. Vol.9, 1975, pp.415-432.
- (4) W.D.Kroll, J. Res. Nat. Bur. Stand., Vol.43, Nov.1947, pp.465-472.
- (5) 吉識雅夫他, 有孔板の座屈強度について(その1) 造船協会論文集, 第122号, 1967, pp.137-145.