

広島大学工学部 正員 常松 芳昭
 広島大学大学院 学生員 〇荒川 賢治

1. まえがき

沖積河川の下流部等の低平地における緩勾配水路網の解析法に関して、これまでいくつかの研究がみられる。¹⁾しかし、これらは必ずしも実用的とはいえない。本研究では、複雑な開水路網系を集中型のネットワーク・システムとしてモデル化し、これにグラフ理論を応用することによつて、基礎方程式系をベクトルと行列によつて簡単にかつ統一的に表現し、さらにこれに基づいて実用的な流量解析法を展開しようとしたものである。

2. 開水路網系の集中型モデル

開水路網系を水路形状が急変する部分(水路急変部)と水路漸変部とに分け、それぞれを集中型の要素とし、これらを有限個の節点と連結することによつて集中型モデルとしての有向グラフが考えられる。もちろん、流れの方向は枝の向きに対応している。この際に、水路急変部のモデル化が重要な問題となるが、ここでは例えば図-1に示す三分岐水路に対しては図-2のようなグラフ・モデルを作成する立場をとることにする。すなわち、水路急変部の上下断面に節点を対応させ、これらを実際のシステムにしたがって有向枝で連結する方法である。この場合、実際の系における水深および水路幅はグラフ上では節点定数となり、また流量は枝定数となることは明らかである。なお、以下においては簡単のため次の前提条件をおく。i) 合流損失は他の諸損失に比較して小さいものとして無視できる。ii) 開水路網流れの方向はこれに相似した有向グラフの枝の向きと一致している。iii) 各水路はすべて長方形断面である。

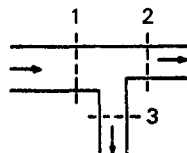


図-1 三分岐水路

3. 基礎方程式系の行列表示

いま、システム・グラフは $(m+1)$ 個の節点とそれらの枝から成るネットワークとする。さらに、行列とベクトルを次のように定義しておく。 $A(m, e)$: n 行 e 列の有向接続行列、 $B_{cp}(e)$: 有向原始ループ行列、 $q(e, e)$, $q(e)$: 各枝の流量を示す対角行列、列ベクトル、 $H(n, n)$, $H(m)$: 各節点の水深を示す対角行列、列ベクトル、 $h(e)$: 各水路の損失水頭を示す列ベクトル、 $\Phi(m)$: 各節点におけるエネルギー位を示す列ベクトル、 $Q(m)$: 各節点に対するシステムへの境界流量を示す列ベクトルで流入を正とする、 $Z(m)$: 各節点ごとの基準面からの水路床高さを示す列ベクトル、 $b(m, m)$: 各節点ごとの水路幅を示す対角行列、 $l(e, e)$: 各水路長を示す対角行列(水路急変部に対応する枝の成分は1)、 $f(e, e)$: 各水路の損失係数を示す対角行列、 A^* : A の転置行列、 $\bar{q}$: ベクトル q を対角行列化したもの、である。



図-2 グラフ・モデル

さて、上述の記号を用いれば、開水路網流れの基礎方程式系は次のように表わされる。

$$\text{流量保存則: } Aq = Q \quad (1)$$

$$\text{節点エネルギー位: } \Phi = H + Z + \frac{1}{2g} b^2 H^2 [(|Aq|q) + |Aq|q] \quad (2)$$

$$\text{エネルギー方程式: } A^* \Phi - D = h \quad (3)$$

ここに、 $|Aq|$: 各節点の流速を計算するための流量を与える n 行 e 列の絶対行列であり、行列 A から次のようにして作られるものである。すなわち、 A の各行について、合流節点に関する行については+1のみを、また Q の作用しない中間節点(分流節点も含む)に関する行については-1のみを残し、ソース・ノードおよびシンク・ノードに関する行については A と同様の成分をそのまま残し、さらに Q の作用する中間節点に関する行については、 Q が正のとき+1、 Q が負のとき-1を残してできる行列 Aq の絶対行列である。また、 D : $(m+1)$ 番目の節点(通常は水深既知のシンク・ノード)におけるエネルギー位をこれに隣接する枝の成分にのみ与え、他は0としてで

さる \$e\$ 個の成分をもつ列ベクトルである。

ところで、エネルギー損失式としてどのような式を用いるかが問題であるが、ここでは取り扱いの便宜上、水路漸変部と水路急変部のいずれにおいても速度水頭に比例する式形を用いることとした。この場合、各枝における損失水頭は、両端の節点における速度水頭の平均を用いれば、次のように表わされる。

$$\text{エネルギー損失式: } h_l = \frac{1}{2g} f \cdot l \cdot \frac{1}{A_R^2} (B^2 H^3 + 2B^3 H^2) + \frac{1}{2g} f \cdot l \cdot \frac{1}{A_0^2} (B^2 H^2) \cdot \frac{1}{A_0} |Q_1| \cdot |Q_2| + C \quad (4)$$

ここに、\$|A_R|\$、\$|A_0|\$ は \$|A|\$ においてそれぞれ水路急変部の枝に関する行成分をすべて 0、水路漸変部の枝に関する行成分をすべて 0 とした行列である。また \$C\$ はシンクノードである \$(n+1)\$ 番目の節点に隣接する枝に関する成分にそのシンクノードにおける損失水頭の \$e\$ をおき、その他の成分はすべて 0 とした列ベクトルである。

4. 流量計算法

一般に、ネットワークに関して次の関係が成立することが知られている²⁾。

$$B = [-A_C^* \cdot (A^*)^T, I] \quad , \quad Q_1 = B^* Q_2 + \begin{Bmatrix} A_T^* \cdot Q \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ここに、\$A_T\$: システムグラフを張る木に関する行列、\$A_C\$: 補木に関する行列、\$Q_2\$: 補木の流量を表わす列ベクトル、\$I\$: 単位行列、\$0\$: 零ベクトルである。

\$Q_1\$: 流量の仮定値、\$H\$: 水深の仮定値、\$\Delta Q_1\$ および \$\Delta H\$: 補正值、として、\$Q_1 = Q_1' + \Delta Q_1\$、\$H = H' + \Delta H\$ の関係を用い、補正值の自乗および相乗項を無視すれば、式(2)、(3)および(4)より 1 次近似式として次式をえる。

$$X \Delta H = Y \Delta Q_1 + W \quad (6)$$

ここに、\$K_1 = |A_R| \cdot Q_1'\$、\$K_2 = \bar{K}_1 \cdot K_1\$
 $W = -A^* H' - A^* Z - \frac{1}{2g} A^* B^2 H'^2 K_2 + D + \frac{1}{2g} f \cdot l \cdot \frac{1}{A_R^2} (B^2 H'^3 + 2B^3 H'^2) + \frac{1}{2g} f \cdot l \cdot \frac{1}{A_0^2} (B^2 H'^2) \cdot K_2 + C$
 $X = A^* - \frac{1}{g} A^* B^2 H'^2 \bar{K}_2 + \frac{1}{2g} f \cdot l \cdot \frac{1}{A_R^2} (3B^2 H'^4 + 4B^3 H'^3) + 2 \frac{1}{2g} f \cdot l \cdot \frac{1}{A_0^2} (B^2 H'^3) \cdot \bar{K}_2$
 $Y = -\frac{1}{g} A^* B^2 H'^2 \bar{K}_1 \cdot |A_0| + \frac{1}{2g} f \cdot l \cdot \frac{1}{A_R^2} (B^2 H'^3 + 2B^3 H'^2) + \frac{1}{2g} f \cdot l \cdot \frac{1}{A_0^2} (B^2 H'^2) \cdot \bar{K}_1 \cdot |A_0|$
 である。式(6)は補正水深と補正流量の関係を与える式であり、さらに次のように変形できる。

$$\Delta H = [X^* X]^{-1} \cdot X^* Y \Delta Q_1 + [X^* X]^{-1} \cdot X^* W \quad (7)$$

一方、\$B \cdot h = 0\$ の関係に式(4)を代入し、補正值に関する 2 次以上の項を無視すると、式(4)より \$\Delta Q_1 = B^* \Delta Q_2\$ の関係が成立するから、結局次式をえる。

$$\Delta Q_2 = [T \cdot B^*]^{-1} \cdot P \quad (8)$$

ここに、
 $P = -B \cdot \frac{1}{2g} f \cdot l \cdot \frac{1}{A_R^2} (B^2 H'^3 + 2B^3 H'^2) \cdot K_2 - [A_R^*] (3B^2 H'^4 + 4B^3 H'^3) + 2 \frac{1}{2g} f \cdot l \cdot \frac{1}{A_0^2} (B^2 H'^3) \cdot \bar{K}_2 \cdot [X^* X]^{-1} \cdot X^* W - B \cdot C$
 $T = -B \cdot \frac{1}{2g} f \cdot l \cdot \frac{1}{A_R^2} (3B^2 H'^4 + 4B^3 H'^3) + 2 \frac{1}{2g} f \cdot l \cdot \frac{1}{A_0^2} (B^2 H'^3) \cdot \bar{K}_2 \cdot [X^* X]^{-1} \cdot X^* Y + B \cdot \frac{1}{2g} f \cdot l \cdot \frac{1}{A_R^2} (B^2 H'^3 + 2B^3 H'^2) + \frac{1}{2g} f \cdot l \cdot \frac{1}{A_0^2} (B^2 H'^2) \cdot \bar{K}_1 \cdot |A_0|$
 である。したがって、式(7)および(8)より水深の逐次近似式として次式をえる。

$$\Delta H = [X^* X]^{-1} \cdot X^* Y B^* \Delta Q_2 + [X^* X]^{-1} \cdot X^* W \quad (9)$$

式(8)および(9)を用いた開水路網の水利計算手順は図-3 のフロー・チャート のようである。

5. おわりに

以上、緩慢な定常開水路網流れの解析法の一つを示した。本手法の有用性、妥当性等については多くの具体的な計算結果にまたねばならない。また、有向枝の向きと逆の流れが許容されるような一般的なグラフモデルに対する解析法の展開は今後の課題として残されている。

参考文献

1) 荒木正夫：複雑な開水路網の一解法，土木学会論文集，第 67 号，昭和 35 年 3 月。
 2) 串松芳昭：管路水輸送システムのグラフ理論的解析，土木学会論文報告集，第 229 号，昭和 49 年 9 月

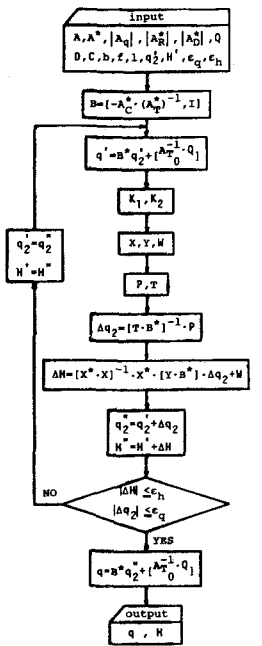


図-3 フロー・チャート