

II-9 扇状地形における被圧地下水の塩水化現象の解析

愛媛大学工学部 正員 〇 岸 洋介
奈良教育大学 福尾義昭

1. まえがき 近年、都市開発や大規模工業の進展に伴ない、地下水の大量揚水が行なわれるようになり、その結果、臨海地域においては地下水位の低下と共に地下水中に海水が混入するいわゆる“塩水化現象”の発生が各地で見られる。塩水化の進行に伴ない地下水利用に支障をきたしている地域においては、地下水の適正揚水量の評価や将来予測を得るために、その地域の揚水量分布とそれに対応する塩水混入状況との関係を量的に把握する必要がある。この両者の関係を定量的に求める理論的研究が、2次元の取扱いのもとに 福尾^{1), 2)}によってなされている。この研究では、その理論を3次元的な取扱いへと拡張し、扇状地形の被圧地下水の揚水とそれに伴う淡水境界面の移動との関係を定量的に求めるための理論的モデルの検討を行なうものである。

2. 被圧地下水の塩水化モデル 被圧地下水の塩水化モデルを設定する場合に次の仮定をする。(i) 滞水層中の淡水と塩水は明瞭な境界を有し、両者の混合、拡散の影響は無視する。(ii) 滞水層は均質、等方であり、下部の不透水層は水平である。(iii) 地下水及び塩水の圧力を静水圧として近似する。以上の仮定の下に、図-1(a)に示した理想化した扇状地形ABDCを考え、地下水は弧CDから流入し弧ABから海へ流出とする。側面BD及びACは不透壁とする。図-1(a)の鉛直断面を図-1(b)に示す。被圧地下水は一定の厚さDの滞水層中を流れ、一方海側から塩水が厚さCで滞水層中に浸入し、 $r = \ell(\theta)$ でそれが0になるとする。以下 $r \leq \ell(\theta)$ の領域を“淡水域”、 $\ell(\theta) \leq r \leq R$ の領域を“塩水化域”と呼ぶことにする。淡水域の水頭を $\eta_1 + D$ 、塩水化域のそれを $\eta_2 + D$ とし、また滞水層と海の接線部分($r = R$)では $C = D$ とする。被圧滞水層中の地下水流動の基本式として³⁾

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left\{ k(\lambda + 2\mu) / \rho_1 g \right\} \Delta \Phi \quad (1)$$

ここに Φ : 水頭, k : 透水係数, λ, μ : 滞水層に関する Lamé の定数, ρ_1 : 地下水密度, g : 重力加速度及び Δ : Laplacian operator である。(1)式を r について地下水の上下の境界面 $z = \zeta_2(r, \theta)$ 及び $z = \zeta_1(r, \theta)$ の間で積分し、境界面 $z = \zeta_2$ と $z = \zeta_1$ 上での水収支を考慮すれば、次の式を得る。

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dz = \frac{k(\lambda + 2\mu)}{\rho_1 g} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} dz + \frac{1}{r} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} dz + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} dz - \frac{q}{k} \right\} \quad (2)$$

ここに、 $q(r, \theta)$ は滞水層の上面から単位面積、単位時間当り揚水される淡水量である。ここで仮定(iii)の静水圧近似を用い、また ζ_2 及び ζ_1 として図-1(b)の様な境界面を考えれば、(2)式は次の様になる。

$$\text{淡水域: } \frac{\partial \eta_1}{\partial t} = \frac{k(\lambda + 2\mu)}{\rho_1 g} \left[\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \theta^2} - \frac{q}{kD} \right] \quad (3)$$

$$\text{塩水化域: } (D - \zeta_1) \frac{\partial \eta_2}{\partial t} = \frac{k(\lambda + 2\mu)}{\rho_1 g} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ (D - \zeta_1) \frac{\partial \eta_2}{\partial r} \right\} + \frac{1}{r} (D - \zeta_1) \frac{\partial \eta_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ (D - \zeta_1) \frac{\partial \eta_2}{\partial \theta} \right\} - \frac{q}{k} \right] \quad (4)$$

3. 方程式の線型化と接続 方程式(3)及び(4)は、水頭 η_1 及び η_2 の時間的変動をとり入れた式であるが、ここでは定常状態のみを考察することにする。定常状態の基本方程式は、(3)、(4)式より

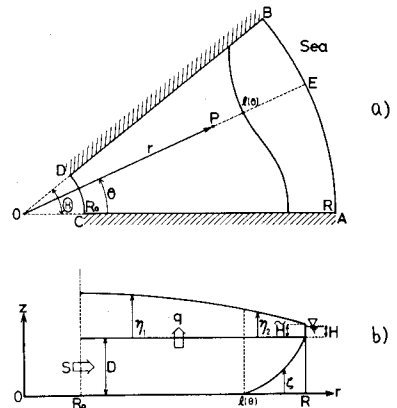


図-1. 被圧地下水の塩水化モデル

$$\text{淡水域} : D \left\{ \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \theta^2} \right\} = \frac{q}{k} \quad (5)$$

$$\text{塩水化域} : \frac{\partial}{\partial r} \left\{ (D-\zeta) \frac{\partial \eta_2}{\partial r} \right\} + \frac{1}{r} (D-\zeta) \frac{\partial \eta_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ (D-\zeta) \frac{\partial \eta_2}{\partial \theta} \right\} = \frac{q}{k} \quad (6)$$

塩水化域の方程式(6)は準線型の形をしているが、これを次の様にして線型化する。淡水域境界面 $\Sigma = \zeta(r, \theta)$ では淡水と塩水の圧力が等しいという条件から $(D-\zeta) = (\eta_2 - \tilde{H})/\gamma$ ($\gamma = (\rho_s - \rho_f)/\rho_f$, $\tilde{H} = (\rho_s/\rho_f)H$, ρ_s : 塩水の密度) という関係式が成立するので、 $(D-\zeta)(\partial \eta_2/\partial r) = (\eta_2 - \tilde{H})/\gamma \cdot (\partial \eta_2/\partial r)$
 $= \partial/\partial r \{ (\eta_2 - \tilde{H})^2/2\gamma \}$ となる。θについての微分も同様だから(6)式は

$$\Delta \{ (\eta_2 - \tilde{H})^2/2\gamma \} = q/\gamma k D^2 \quad (\Delta \equiv \partial^2/\partial r^2 + (1/r) \partial/\partial r + (1/r^2) \partial^2/\partial \theta^2) \quad (7)$$

また淡水域の方程式(5)は $\Delta \{ (\eta_1 - \tilde{H})/\gamma D \} = q/\gamma k D$ と変形すれば、2つの領域の方程式は

$$\Delta \eta_1^* = q^*/D^2 \quad \text{及び} \quad \Delta \eta_2^* = q^*/D^2 \quad (8)$$

となって同形の線型方程式になる。ここに $\eta_1^* = \phi_1 - 1/2$, $\eta_2^* = 1/2 \phi_2^2$ ($\phi = (\eta - \tilde{H})/\gamma D$), $q^* \equiv q/\gamma k$ である。

淡水域と塩水化域の境界 $r = \zeta(\theta)$ では $\zeta = 0$ であり、また $\eta_1 = \eta_2$ となっているべきだから、その境界上で

$$\eta_1 = \eta_2 = \tilde{H} + \gamma D, \quad \text{従って} \quad \eta_1^* = \{ (\eta_1 - \tilde{H})/\gamma D \} - 1/2 = 1/2 \quad \text{及び} \quad \eta_2^* = \{ (\eta_2 - \tilde{H})/\gamma D \}^2/2 = 1/2$$

となる。また境界では η_1^* 及び η_2^* の座標 r, θ についての一次微分は等しくなる事も簡単に導き出せる。すなわち η_1^* と η_2^* は境界 $r = \zeta(\theta)$ で滑らかに接続し、そこでは $1/2$ の値になる事が分かる。従って(8)式の2つの方程式は、淡水域及び塩水化域の両者にまたがって単一の方程式

$$\Delta \eta^*(r, \theta) = q^*(r, \theta)/D^2 \quad (9)$$

に帰着する。この方程式の解 $\eta^*(r, \theta)$ が求まれば、境界線 $r = \zeta(\theta)$ は $\eta^*(r = \zeta(\theta), \theta) = 1/2$ の条件により決定される。 η^* が満たさねばならぬ境界条件を図-2に示す。図中 $S^* \equiv S/\gamma k D^2$ (S : 地下水流量) である。

4. グリーン関数による解 方程式(9)は source が $q^*(r, \theta)/D^2$ である Poisson の方程式である。この解は図-2よりもっと複雑な境界上での同様な境界条件についてグリーン関数の方法により得られるが、特に図-2の様な扇形で、かつ $\Theta = 360/m$ (degree) ($m = 2, 4, 6, \dots$) の場合には、鏡像の方法によりグリーン関数を解析的に求める事ができる。結果は $r^* \equiv r/R$, $Q^* \equiv R^2 q^*/D^2$ として扇形内部領域 D の内の積分形で

$$\eta^*(r^*, \theta) = \frac{S^*}{2\Theta} \log \frac{1}{r^*} - \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \int_{D_0} Q^*(r_l^*, \theta_l) \log \left\{ \frac{1 + r_l^* r^* - 2 r_l^* r^* \cos(\theta - \theta_l)}{r_l^* + r^* - 2 r_l^* r^* \cos(\theta - \theta_l)} \right\} r_l^* d\theta_l \right. \quad (10)$$

ここに $\theta_l = (l-1)\Theta + \begin{cases} \theta, & (l: \text{奇数}) \\ \theta + \Theta, & (l: \text{偶数}) \end{cases}$ 。図-3に円内で一樣揚水がある場合の水頭中の分布の一例を示す。図中で $\phi = 1.0$ の線は、境界 $r^* = \zeta^*(\theta)$ ($\zeta^* \equiv \zeta/R$) を表わす。

5. あとがき 以上、扇状地形における塩水化現象に関する理論的考察を行なったが、定常状態においては、水頭 η の形を適当に変換することにより、淡水域と塩水化域の方程式は両方の領域にまたがって単一の Poisson 方程式にまとめられる事が分った。これは揚水量と淡水域境界面の変動との間の量的な関係を把握する上で解析を容易にするものと思われる。この研究では理想化された扇状地形について考察したが、もっと複雑な地形にも適用できる。今後、具体的な扇状地について Poisson 方程式を数値的に解いて、この理論的モデルの適用性の検討を行なうつもりである。

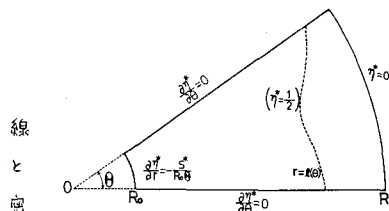


図-2. η^* の境界条件

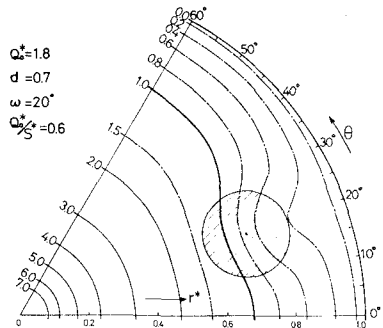


図-3. 円内で一樣揚水するときの例 ($\Theta = 60^\circ$, $S^* = 3.0$)

参考文献 1) 福尾; 被圧地下水の塩水化について, 日本地下水学会誌, 第14巻, 第2号, 1972, pp. 33~44.

2) 福尾, 北岡; 内湾における海水と地下水の交流について, 沿岸海洋研究1-1, 第12巻, 第1号, 1974, pp. 23~36.

3) Fukuo, Y.; Visco-Elastic Theory of the Deformation of a Confined Aquifer, Proc. Int. Symp. on Land Subsidence, Tokyo, 1969, pp. 541~562.