I−1 不連続な境界による波の変形に関する研究(2)

山口大学工学部 (正)○金山和雄, 藤原輝男
〃 (学)塩谷章

1 まえがき [1),2),3),4),5)]

不連続な境界による波の変形に関しては，従来より数多くの優れた研究がある。古くはLamb, Dean, Ursell Newman, Wiegel がおり，最近では井島，日野の研究がある。井島はSturm-Liouville 型の固有値問題としてラプラス式を扱い数値解を示し，日野はWave maker 理論より得られる積分方程式を直接数値的に解き，透過率，反射率について考察している。著者らはFig-1 に示す構造物による波の変形として，2、3の考察を行い，現象との対応を試み，興味ある結果を得たので，ここに報告する。

2. 理論的考察 [3),6)]

2-1. エネルギー輸送量

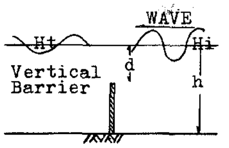

Fig-1. Notation and definition sketch

一般に波は進行方向に一定のエネルギーを輸送する。この点に着目して，鉛直壁背後に形成される波は，自由水面と構造物間の自由空間を通過するエネルギーによるとして，理論を展開する。自由表面 η と静水面下 y との間で一周期間に輸送されるエネルギーの平均値は容易に次式で表示される。

$$P_{\eta-y}=\frac{1}{T}\int_0^T\int_y^{\eta} p\cdot u\, dt\cdot dy \qquad (1)$$

ここに

$$p=-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{1}{2}\rho q^2 \qquad u=\frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad (2)$$

$$\phi=\frac{ag}{\sigma}\frac{\cosh k_0(h+y)}{\cosh k_0h}\sin(k_0x-\sigma t) \qquad (3)$$

であり，ρ は流体密度，q は流体粒子の合速度，a は入射波の振幅，$k_0=2\pi/L$，$\sigma=2\pi/T$，L は波長，T は周期を示す。(1)式の積分において，$\eta=a\cos\sigma t$，とおき Modified Bessel 函数を用いれば次式を得る。

$$P_{\eta-y}=\frac{1}{4}\rho g a^2 c\left\{\frac{-2k_0y}{\sinh 2k_0h}-\frac{\sinh 2k_0(y+h)}{\sinh 2k_0h}+2\left(I_0(2k_0a)-\frac{1}{2k_0a}I_1(2k_0a)\right)+4\left(-I_0(k_0a)+\frac{2}{k_0a}I_1(k_0a)\right)\right\} \qquad (4)$$

Modified Bessel 函数の性質から $I_0(k_0a)\fallingdotseq1$, $I_0(2k_0a)\fallingdotseq1$ $I_1(k_0a)\fallingdotseq\frac{1}{2}k_0a$，$I_1(2k_0a)\fallingdotseq k_0a$ とすれば次式となる。

$$P_{\eta-y}=\frac{1}{4}\rho g a^2 c\left\{\frac{-2k_0y-\sinh 2k_0(y+h)}{\sinh 2k_0h}+1\right\} \qquad (5)$$

同様に自由水面から水底まででは(5)式より次式を得る。

$$P_{\eta+h}=\frac{1}{4}\rho g a^2 c\left\{\frac{2k_0h}{\sinh 2k_0h}+1\right\} \qquad (6)$$

(5)式において $y=-d$ とし，(6)式との比をとれば，透過率 K_t に対して次式を得る。

$$K_t=\sqrt{\frac{\sinh 2k_0h-\sinh 2k_0(h-d)+2k_0d}{\sinh 2k_0h+2k_0h}} \qquad (7)$$

2-2 Wave maker 理論.

座標を静水面下方に y 軸をとり，流体は非圧縮，運動は非回転運動とすれば，ポテンシャルが存在し，流体中いたるところでラプラスの式が成立する。

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \qquad (8)$$

自由表面，水底の条件は，微小振幅波を仮定すれば次式で与えられる。

$$\left(\frac{\sigma^2\phi}{g}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{y=0}=0,\quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{y=h}=0 \qquad (9)$$

波の場合(8)式の特解として次の二式が知られている。

$$\phi=e^{i(\sigma t-k_0x)}\cosh k_0(y-h) \qquad (10)$$

$$\phi_j=e^{i(\sigma t-k_jx)}\cos k_j(y-h) \qquad (11)$$

$$(j=1,2,3\cdots\cdots)$$

ここに k_0, k_j は Wave number であり境界条件により次式によって規制される。

$$gk_0\tanh k_0h=\sigma^2,\quad gk_j\tan k_jh=-\sigma^2 \qquad (12)$$

一方ポテンシャルによって導かれる水平方向の水粒子の速度 u は周期的な時間項と，y に関する項とに分離して次式で表示できる。

$$-\frac{\partial\phi}{\partial x}=f(y)\cos\sigma t \qquad (13)$$

未知函数f(y)をフーリエ級数に(0~h)区間で展開する。

$$f(y)=A\cosh k_0(y-h)+\sum_{j=1}^{\infty}B_j\cos k_j(y-h) \quad (14)$$

A, B_jはフーリエ係数で次式より求まる。

$$A=\frac{4k_0}{\sinh 2k_0h+2k_0h}\int_0^h f(y)\cosh k_0(y-h)\,dy \quad (15)$$

$$B_j=\frac{4k_j}{\sin 2k_jh+2k_jh}\int_0^h f(y)\cos k_j(y-h)\,dy \quad (16)$$

以上より、ラプラスの解として次式を得る。

$$\phi=Ak_0^{-1}\cosh k_0(y-h)\sin(\sigma t-k_0x)+\cos\sigma t\sum_{j=1}^{\infty}B_jk_j^{-1}e^{k_jx}\cos k_j(y-h) \quad (17)$$

f(y)に対して壁前面の部分重複波による速度分布を適用する。

$$f(y)\begin{cases}\dfrac{gTH_i}{2L}\left(1-\sqrt{1-K_t^2}\right)\dfrac{\cosh k_0(y-h)}{\cosh k_0h} & (0\leqq y\leqq d) \quad (18)\\[2ex] 0 & (d<y<h) \quad (19)\end{cases}$$

よって ポテンシャルϕとして次式を得る。

$$\phi=\frac{gTH_i\left(1-\sqrt{1-K_t^2}\right)}{2Lk_0\cosh k_0h(\sinh 2k_0h+2k_0h)}\{\sinh 2k_0h-\sinh 2k_0(h-d)+2k_0d\}\times\cosh k_0(y-h)\sin(\sigma t-k_0x) \quad (20)$$

(20)式と $\eta=\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\cdot\frac{1}{g}\right)_{y=0}$ の関係よりηに対して次式を得る。

$$\eta=\frac{H_i\left(1-\sqrt{1-K_t^2}\right)(\sinh 2k_0h-\sinh 2k_0(h-d)+2k_0d)}{2(\sinh 2k_0h+2k_0h)}\cos(\sigma t-k_0x) \quad (21)$$

透過波を $\eta_t=\frac{H_t}{2}\cos(\sigma t-k_0x-\varepsilon)$ とおき、$x=0$, $\varepsilon=0$として考えればK_tとして次式を得る。

$$K_t=\frac{2W}{1+W^2}\ ,\quad W=\frac{\sinh 2k_0h+2k_0d-\sinh 2k_0(h-d)}{\sinh 2k_0h+2k_0h} \quad (22)$$

2-3 運動量保存則

波の水粒子軌跡が開いている事より運動量輸送に着目し、有限振幅波理論より、次式を表示した。

$$K_t=\sqrt[4]{\frac{\sinh 4k_0h+4k_0d-\sinh 4k_0(h-d)}{\sinh 4k_0h+4k_0h}} \quad (23)$$

3 理論と実験の対応

Fig-2に理論と実験の対応を示した。

(参考文献) 1) 日野幹雄. 土木学会論文集 Vol 190. 1971年6月.
2) 井島武士. 第17回. 海岸工学論文集. 3) Wiegel R.L. ASCE. Vol 1. WW1. (1960). 4) 井島武士. 海岸工学. 朝倉書店
5) Ursell, F. Proc. Cambridge Phil. Soc 43(3). 1947年.
6) K. Kanayama Coastal Engineering in Japan Vol 18. 1976.

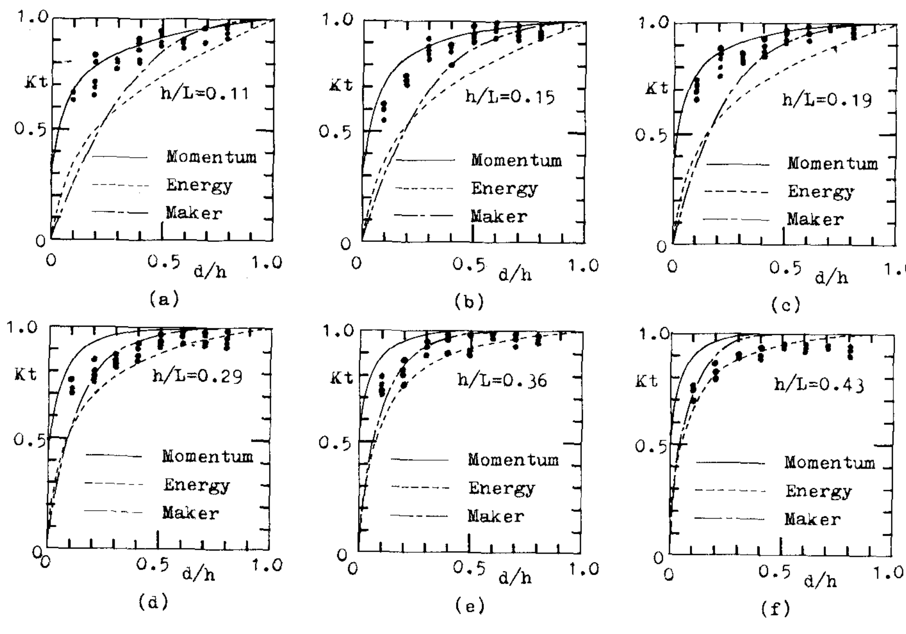

Fig-2. Relationship between d/h and Kt.