I—12　移動荷重を受ける板の有限帯板法による解析

フジタ工業(株)　　正員　○岡部益雄

山口大学工学部　　正員　　中川浩二

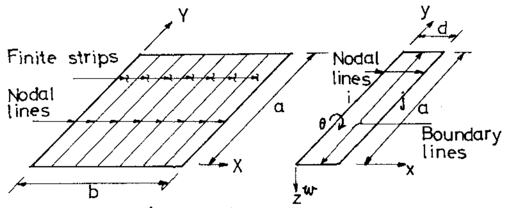
1. まえがき

現在よく知られた汎用的なマトリックス構造解析法として有限要素法がある。それを発展させたものとして半解析的有限要素法として位置づけられている有限帯板法（*Finite Strip Method*）が，1968年にY.K. Cheung，G.H. Powellらによって手法的に確立された。この解析法では変位関数を多項式部と基本関数部に分け，それぞれ別の座標パラメータで表わす。したがって変位関数が調和級数を含み，問題によって関数の直交性により剛性マトリックス，質量マトリックスなどが単一級数展開によって定まるバンドマトリックスとなり，マトリックス計算上非常に有利な解析法である。ここではこの手法をモデル化した板に移動荷重が載荷された場合の動的応答解析に適用して，各種のパラメータによる板の動的応答とF.S.Mの有用性を示した。

2. 解析法の概説

板の曲げ問題を考える。Fig.1のように帯板要素で要素分割を行なう。Fig.1(b)の一要素の境界条件を次のように定める。

$$\left.\begin{aligned} w_l &= \sum_{m=1,2\cdots r} w_{lm} Y_m \\ \theta_l &= \sum_{m=1,2\cdots r} \theta_{lm} Y_m \end{aligned}\right\} \quad (1)$$



(a) Idealized plate model　(b) Typical finite strip

Fig.1　Geometry of idealized plate and strip

ただし，$x=0$で$l=i$，$x=d$で$l=j$となる。またmは調和級数番号，rは採用級数項数，Y_mは基本関数，w_{lm} θ_{lm}は節線l上の変位振幅である。このとき変位関数は次のようになる。

$$w(x,y)=\sum_{m=1,2\cdots r}\left[\left(1-\frac{3x^2}{d^2}+\frac{2x^3}{d^3}\right)Y_m,\ \left(x-\frac{2x^2}{d}-\frac{x^3}{d^2}\right)Y_m,\ \left(\frac{3x^2}{d^2}-\frac{2x^3}{d^3}\right)Y_m,\ \left(\frac{x^3}{d^2}-\frac{x^2}{d}\right)Y_m\right]\{w_{im},\theta_{im},w_{jm},\theta_{jm}\}^T$$
$$=\sum_{m=1,2\cdots r}[N]_m\{\delta\}_m \qquad (2)$$

ここで(x,y)は要素座標であり，$[N]_m$は形状マトリックス，$\{\delta\}_m$は変位成分である。各要素についての全ポテンシャルエネルギU^eの最小化を行なうと，

$$\partial U^e/\partial\delta=\sum_{m,n=1,2,\cdots r}\left\{[K]_{mn}\{\delta\}_n-\{f\}_{mn}\right\}=0 \qquad (3)$$

となる。ここで$[K]_{mn}$は要素剛性マトリックス，$\{f\}_{mn}$は荷重ベクトルである。板全体のポテンシャルエネルギUが，$U=\sum U^e$であると仮定すると，次式のように全体剛性マトリックス$[K]$が得られる。

$$\partial U/\partial\delta=[K]\{\delta\}-\{F\}=0 \qquad (4)$$

多自由度系の振動方程式は，一般に次のような式に表わせる。

$$[M]\{\ddot{\delta}(t)\}+[G]\{\dot{\delta}(t)\}+[K]\{\delta(t)\}=\{F(t)\} \qquad (5)$$

ここで，$[M]$ $[G]$はそれぞれ全体質量マトリックス，全体減衰マトリックスである。$[G]$は$[M]$と$[K]$の線形結合として，一般化座標変位$\{P(t)\}$とモーダルマトリックス$[X]$を用いて式(5)を一般化すると次のようになる。

$$\ulcorner L_\lrcorner\{\ddot{P}(t)\}+\ulcorner H_\lrcorner\{\dot{P}(t)\}+\ulcorner C_\lrcorner\{P(t)\}=\{Q(t)\} \qquad (6)$$

ここで，$\ulcorner L_\lrcorner=[X]^T[M][X]$，$\ulcorner H_\lrcorner=[X]^T[G][X]$，$\ulcorner C_\lrcorner=[X]^T[K][X]$であり，それぞれ一般化質量マトリックス，一般化減衰マトリックス，一般化剛性マトリックスといわれ対角マトリックスである。$\{Q(t)\}$は一般化荷重ベクトルである。式(6)は

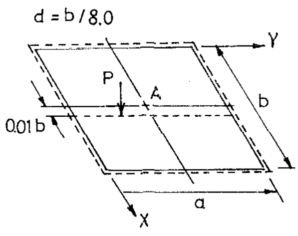


Fig.2　Idealized structure

さらに次のような式に書ける．

$$\{\ddot{P}(t)\}+\ulcorner L \lrcorner^{-1}\ulcorner H \lrcorner\{\dot{P}(t)\}+\ulcorner L \lrcorner^{-1}\ulcorner C \lrcorner\{P(t)\}=\ulcorner L \lrcorner^{-1}\{Q(t)\} \qquad (7)$$

式(7)は(自由度 n のとき)非連成な n 個の方程式から成り，それらを独立に解けばよい．ここではルンゲ・クッタ法を用いる．

3．計算例と結論

Fig.2 のような四辺単純支持板に，質量のない走行荷重Pを考える．このとき種々のパラメータのもとで動的応答計算をする．速度は無次元化パラメータ $\alpha = V_0/2\omega_1 a$（ただし，V_0 は速度 ω_1 は基本円振動数）を用いる．Fig.3では速度パラメータと辺比 a/b によるスペクトルを示し，Fig.4 では前図の点B，Cの動的応答曲線を示した．Fig.5では各級数項別の速度パラメータなどに対するスペクトルを示した．Fig.6 では $\ulcorner L \lrcorner^{-1}\ulcorner H \lrcorner = 2\lambda\omega_1 \ulcorner I \lrcorner$（ただし，$\lambda$ は減衰比）と近似した場合の減衰振動を示し，Fig.7は異方性の度合をパラメータとした各調和級数項別のスペクトルを示した．

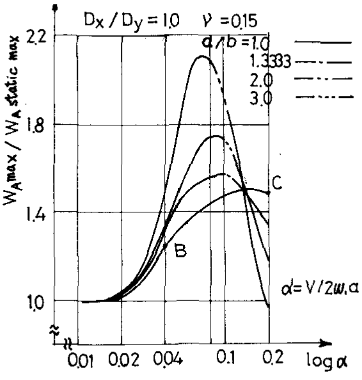


Fig.3 Spectrum of maximum deflections at the point A

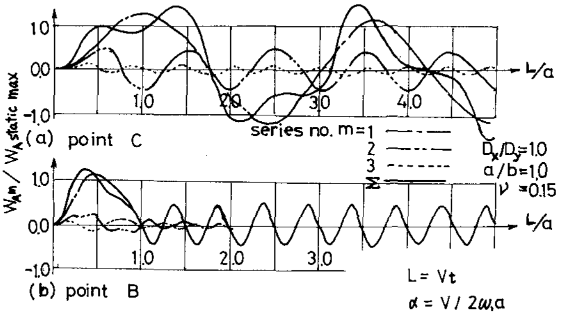


Fig.4 Response history curves of the point A

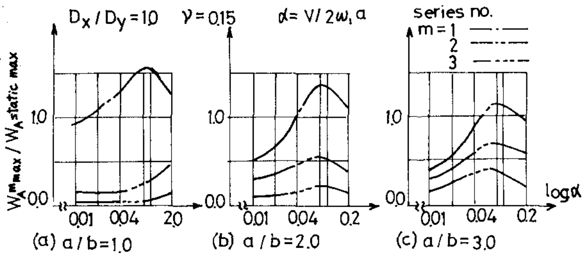


Fig.5 Spectrums of maximum deflection at point A

以上の計算例などから，次のように結論される．

1．動的応答解析では固有値問題への適用性が十分であり，モーダルアナリシスが用いられる．

2．帯板要素を決定するパラメータの中では，辺比 a/b が最も大きく解の収束に影響する．

3．移動荷重の質の加速度の影響は，低次の調和級数項で解が収束する場合影響は小さいが，高次の項まで必要とする場合無視できない．

4．X軸方向(Fig.1)の振動性状は，要素分割数によって定まり，それを十分考慮した分割でなければならない．

5，静的な曲げ応力問題に適用した場合と同様に本解法は，有限要素法に比べて一般性が損なわれるけれども，一定方向に物理的，幾何学的条件が一定に存在する場合大きな経済性が得られる．

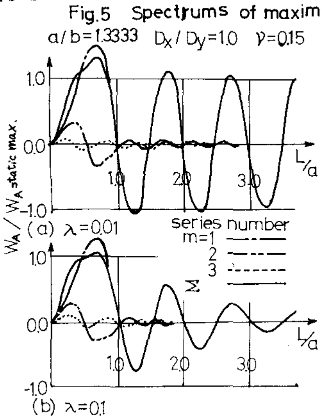


Fig.6 Response history curves of the point A

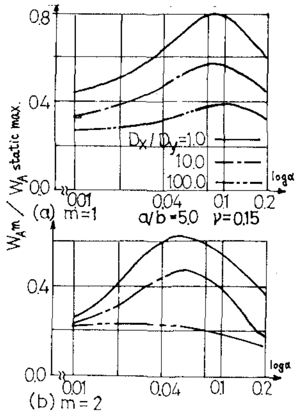


Fig.7 Spectrums of maximum deflection at the point A

4．参考文献

1) Y.K.Cheung: Finite Strip Method Analysis of Elastic Slabs, Pro. ASCE, 94(1968)ST12 pp 1365-1378

2) G.H.Powell: Analysis of Orthotropic Steel Plate Bridge Decks, Pro. ASCE, (1969)ST5 pp 909-922

3) Y.K.Cheung: Flexural Vibrations of Rectangular and Other Polygonal Plates, Pro. ASCE, (1971) EM2 pp 391-411

4) Smith. J.W.: Finite Strip Analysis of the Dynamic Response of Beam and Slab Highway Bridges, Earthquake Eng. S. D, Vol.1, 1973 pp 357-370