I―10　動的信頼性を考慮したタワー状構造物の最適設計

徳島大学　正　員　宇都宮英彦
徳島大学　正　員　沢　田　勉
徳島大学　学生員○野　田　茂

1．まえがき

構造物の最適設計において，ランダムな確率統計的安全性に着目して論じたものは比較的少ない。土木構造物が遭遇する荷重には，予測不可能で制御不可能な地震外乱などがある。このような外乱の現象を把握し、不規則外力に対する合理的設計法を確立するためには、構造系の耐震安全性をその動力学的特性をも考えて評価しなければならない。本研究では，地震入力とその出力応答を定常確率過程と仮定し、確率統計的方法によって構造系の平均的な出力応答を解析的に表現し、その数値解析によって構造系の耐震設計を行なう場合の最適構造設計に関する一方法について論ずる。初期通過確率の近似解としてポアソン分布を用いて最適解を求めた方法に文献(1)があるが，必ずしも適切な信頼性評価を与えていないように思われる。このような問題点を解決する一方法として，各時刻間での応答の相関の影響をできるだけ考慮して精度を向上させ，不規則外力を受ける構造物の破壊の尺度としての初通過確率の制約のもとで、一様かつ安全な分布をなす最適解を求める方法を定式化した。また、振動モード間の相互相関の系の応答に及ぼす効果を定量的に把握し，本手法をタワー状構造物に適用し、数値計算を行なった。さらに、平均応答スペクトルを用いた決定論的解析の試みで、最適解の検討をした。

2．構造系の解析

不規則変動としての地震外力の数式的表現は，平均値 0 でガウス分布に従う定常確率過程を仮定し，極値分布論で最大加速度を推定した。多自由度系の運動方程式は次式で表わされ，

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbb{X}} + \mathbb{C}\dot{\mathbb{X}} + \mathbb{K}\mathbb{X} = \mathbb{F} \tag{1}$$

$\mathbb{M}$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{K}$は，質量（CM法），粘性減衰，剛性マトリックスで，外力項$\mathbb{F}$は確率統計的に記述される。減衰項$\mathbb{C}$が直交モード座標系で対角化可能な形

$$\mathbb{C} = 2\,h_i\,\mathbb{M}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbb{K}\mathbb{M}^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\mathbb{M}^{\frac{1}{2}} \qquad \text{ただし，} h_i \text{：} i \text{番目の減衰定数} \tag{2}$$

の場合には、非減衰時でのコレスキー分解法の適用と併せて，系の動特性が明らかになる。外力および応答のパワースペクトル密度$\mathbb{S}^{F}$と$\mathbb{S}^{x}$，$\mathbb{S}^{\dot{x}}$の関係は，系の動力学的特性であるリセプタンスを通して，次の入出力関係で結ばれる。

$$\mathbb{S}^{x} = (\Phi\,\mathbb{H}\,\Phi^{t})\,\mathbb{S}^{F}\,(\Phi\,\mathbb{H}^{*}\Phi^{t})^{t} \tag{3}$$

$$\mathbb{S}^{\dot{x}} = (\Phi\,\dot{\mathbb{H}}\,\Phi^{t})\,\mathbb{S}^{F}\,(\Phi\,\dot{\mathbb{H}}^{*}\Phi^{t})^{t} \tag{4}$$

ホワイトノイズ加振では$\mathbb{S}^{F} = const$ である。構造応答とその導関数応答の自乗平均値は次式で与えられる。

$$E[\mathbb{X}^2] = \int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{S}^{x}\,d\omega \tag{5}$$

$$E[\dot{\mathbb{X}}^2] = \int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{S}^{\dot{x}}\,d\omega \tag{6}$$

Φ、$\mathbb{H}$、$\dot{\mathbb{H}}$は，変位モードマトリックス，各次振動モードの周波数応答関数とその速度項に対する応答関数である、応力つまり材端力とその導関数の自乗平均値も同様に、材端力モードマトリックスを用いて応答評価をなすことが可能である。ただし、モード間の相互効果を考慮して，系の動力学的特性を摘出した。

3．破壊確率の評価

構造物の強度を判定する場合に関心がもたれることは、将来加えられる外力によって，構造系各部の耐震安全性を示す尺度で測った地震応答量が、材料力学から規定される許容応答量を越えるという問題である。その安全性評価は、いまだ完全に確立されていず、種々の近似解が存在する。本研究では、非定常理論の場にも拡張可能

なYangが提案しているrecurrence solutionによる点系列手法[2]を多自由度系に適用して、信頼性評価の検討を行なった。必要な統計量としては、系応答とその導関数の自乗平均値と相関係数表示などである。極値点過程を$\tau(n)$、各部固有の破壊または機能障害を規定する限界量レベル（死荷重効果を差し引いたもの）をαとすれば、応答変位、応力などの破壊確率P_{f_i}は、地震動継続期間中での応答のハーフサイクル数Nについて、

$$P_{f_i}=\sum_{n=1}^{N}Q(n) \tag{7}$$

ただし、

$$Q(1)\simeq g_0 \tag{8}$$

$$Q(n)\simeq g_0-\sum_{j=1}^{n-1}Q(j)\frac{g^*_{n-j}}{g_0} \tag{9}$$

で評価され、確率密度関数g_0と結合密度関数g^*_{n-j}は、包絡線過程のレーリー分布と結合分布で表現できる。

$$g_0=\exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \tag{10}$$

$$g^*_{n-j}=(1-\gamma_{nj}^2)\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_{nj}^{2m}\,\gamma_c(m+1,\,g_{nj})^2 \tag{11}$$

ここに、系の応答標準偏差σ_xおよび応答レベル$\eta=\frac{\alpha}{\sigma_x}$を用い、

$$\gamma_c(m+1,x)=\frac{1}{\Gamma(m+1)}\int_x^{\infty}e^{-y}y^m\,dy \qquad \Gamma:\text{ガンマ関数} \tag{12}$$

$$g_{nj}=-\frac{\eta^2}{2(1-\gamma_{nj}^2)} \tag{13}$$

γ_{nj}は、系の特性から決定され、n番目とj番目の極値点のタイムラグがτであれば、次式の形で表現することができる。

$$\gamma_{nj}=(\rho_{nj}^2+\lambda_{nj}^2)^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

$$\rho_{nj}=\frac{1}{\sigma_x^2}\int_{-\infty}^{\infty}S^{x_i}\cos\omega\tau\,d\omega \tag{15}$$

$$\lambda_{nj}=\frac{1}{\sigma_x^2}\int_{-\infty}^{\infty}S^{x_i}\sin\omega\tau\,d\omega \tag{16}$$

破壊の基準としては初期通過破壊を考え、構造物要素のばらつきを無視し、応答の特性として狭帯域応答を仮定した。

4. 最適化の方法

タワー状構造物の最適設計において、本研究では、タワー断面を正方形断面とし、設計変数はその断面の剛性（部材断面のサブオプティミゼーション考慮）を考え、目的関数は構造全体の全重量とした。また、制約条件としては、与えられた死荷重、許容応力、許容変位に関して、構造物系を最弱リンクタイプとみなし、各断面の応力とタワーの頂点変位の破壊確率および最小剛性確保としての細長比の制約を考えた。以上のように最適設計の定式化がなされるが、この場合、目的関数・制約条件ともに非線形でかつ微分が容易でない形になっている。このような立場から、本研究では、数理計画法として微分する必要がないPowellのDirect Search法を用いたSUMT法を適用した。定式化として、

$$W=\sum_{i=1}^{NM}\rho_i A_i l_i \longrightarrow \mathrm{Min} \tag{17}$$

$$\text{subject to}\quad P_{f_\sigma}=1-\prod_{i=1}^{NM}(1-P_{f_{\sigma i}})\le P_{f_{\sigma a}} \qquad P_{f_d}=P_{f_{di}}\le P_{f_{da}}\quad(i=1,\cdots,ND) \tag{18}$$

$$\left(\frac{l}{r}\right)_i\le \mathrm{const} \tag{19}$$

ここに、ρ_i・A_i・l_i・r_iは、単位体積重量、断面積、部材長、回転半径を、$P_{f_{\sigma i}}$、$P_{f_{di}}$、P_{fa}、NM、NDは、応力、変位の破壊確率、許容破壊確率（$10^{-3}\sim10^{-5}$）と部材数、制約を受ける変位数である。

5. 数値計算例および考察

タワー状構造物について、地震動の継続時間と構造特性・応答特性、許容破壊確率の変化と最適解の挙動の関係などについて調べ、応答スペクトルから最大応答を推定したときの平均的な最適解（SLP法使用）との検討を試みた。結果の詳細については当日発表をする予定である。

※参考文献

(1) 山田・古川・大石 "動的応答を考慮したタワーピアー系の最適設計" 昭和49年度土木学会関西支部講演概要集
(2) Jann-Nan Yang "Approximation to First Passage Probability" ASCE, Vol.101, EM4, 1975, Aug. PP.361