

鳥取大学工学部 正員 ○白 木 渡
鳥取大学工学部 正員 高 岡 宣 善

1. まえがき 荷重および部材強度とともに確率過程と考えた場合の多部材要素からなる静定構造物の信頼性解析を多次元空間の場合の超過の理論¹⁾を用いて行なった。まず m 個の荷重を受ける n 部材要素からなる静定構造物で、荷重および部材強度がともに仕様の確率分布を有する確率過程であるような一般的な場合の構造物の破壊確率の算定式を誘導した。つぎにその式を1つの荷重を受ける3部材静定トラス構造物で、荷重および部材強度がともに正規定常確率過程である場合に適用して、その場合の構造物の破壊確率の算定式を誘導した。そしてその式を用いて数値計算を行ない、荷重および部材強度の変動係数、部材の中央安全率、構造物の耐用期間、部材強度間の相関係数の構造物の破壊確率におよぼす影響を明らかにすることによって、本研究で示すような確率過程論に基づく構造物の信頼性解析の必要性和強調した。

2. 一般的な場合の破壊確率の算定式 図-1に示すような“weakest-link”モデルタイプの弾性静定トラスに仕様の分布を有する互いに統計的に独立な確率過程である荷重 $S_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, m$) が同時に作用しつづける場合を考える。一般性をそこなうことなしに $S_i(t) > 0$ と仮定する。作用荷重が確率過程であるから、静定系の構造解析により求まる各部材力 $X_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) も確率過程である。また、耐用期間中の構造物の老朽化現象を考慮して、各部材の強度 $R_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) もまた確率過程とする。そして $R_i(t)$ の分布は、引、張りも圧縮も同じであるとする。図-1で示されるような静定構造系の破壊とは、少なくとも1部材以上において不等式 $X_i(t) > R_i(t)$ が成立することである。したがって、 $Z_i(t) = R_i(t) - X_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) で定義される「強度の余裕」と呼ばれる補助的な確率過程を成分に持つ n 次元ランダムベクトル $\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_n(t))$ を導入すると、系の破壊事象を考えることは、 n 次元空間でのランダムベクトル $\mathbf{Z}(t)$ の正領域から負領域への超過の問題を考えることになる。今、 $\mathbf{Z}(t)$ の負領域への各超過がポアソン過程であると仮定すると、求める構造物の破壊の全確率 $\bar{P}(t)$ は、つぎようになる：

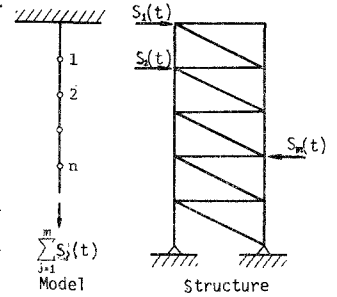


図-1

$$\bar{P}(t) = F_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}) + \{1 - F_{\mathbf{Z}}(\mathbf{0})\} P_f(t) = 1 - \{1 - F_{\mathbf{Z}}(\mathbf{0})\} \exp\left[-\int_0^t P_f(0|t) dt\right] \quad (1)$$

ここに、 $P_f(t)$ は時間が t だけ経過する間に、 $\mathbf{Z}(t)$ のうち少なくとも1つの成分が少なくとも1回ゼロの値を負交差する確率を表わし、 $P_f(0|t)$ はその超過確率の時間密度で、多次元空間の場合の超過の理論を用いると、

$$P_f(0|t) = -\left[\int_0^\infty \dots \int_0^\infty dz_1 dz_2 \dots dz_n \int_0^\infty \dots \int_0^\infty dz_1 dz_2 \dots dz_n f(z_1, z_2, \dots, z_n, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dots, \dot{z}_n | t) \dot{z}_1 \dot{z}_2 + \dots \right. \\ \left. + \dots \dots \dots + \int_0^\infty \dots \int_0^\infty dz_1 dz_2 \dots dz_{n-1} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty dz_1 dz_2 \dots dz_{n-1} f(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, 0, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dots, \dot{z}_{n-1} | t) \dot{z}_n \right] \quad (2)$$

のような形で表わされる。 $f(z_1, z_2, \dots, z_n, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dots, \dot{z}_n)$ は、与えられた同一時点における $\mathbf{Z}(t)$ と $\dot{\mathbf{Z}}(t) = \frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt} = \frac{dR(t)}{dt} - \frac{dX(t)}{dt}$ との同時確率密度である。さらに $F_{\mathbf{Z}}(\mathbf{0})$ は、載荷の最初の時点 $t=0$ において $\mathbf{Z}(t)$ が0という値を負側へ超過する確率、すなわち構造物が最初から破壊する確率で、次式で表わされる：

$$F_{\mathbf{Z}}(\mathbf{0}) = 1 - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f_{\mathbf{Z}}(z_1, z_2, \dots, z_n) dz_1 dz_2 \dots dz_n \quad (3)$$

ここに、 $f_z(z_1, z_2, \dots, z_n)$ は $Z(t)$ の同時確率密度である。

$\bar{F}_z(t)$ と構造物の耐用期間 T における構造物の破壊確率 $Q(T)$ とを関係づける式は、つぎようになる：

$$\int_0^T P(0|t) dt = \ln[1 - \bar{F}_z(0)] - \ln[1 - Q(T)] \quad (4)$$

とくに、荷重および部材強度が定常確率過程の場合、

$$P(0|t) = \frac{\ln[1 - \bar{F}_z(0)] - \ln[1 - Q(T)]}{T} \quad (5)$$

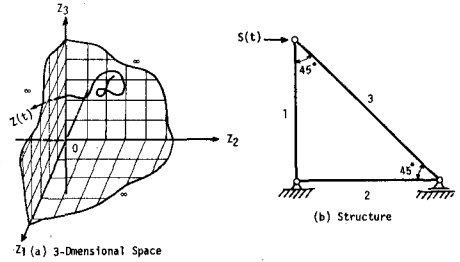


図-2

3. 正規定常確率過程の場合の破壊確率の算定式 2章で述べた理論を図-2に示す3部材静定トラスに1つの荷重 $S(t)$ が作用する場合に適用する。荷重 $S(t)$ および強度 $R(t)$ はいずれも正規定常確率過程であり、かつ互いに非相関である場合を考える。そうすると、強度の余裕 $Z(t)$ も正規定常確率過程となり、この場合の超過確率の時間密度 $P(0|t)$ および最初の時点で破壊する確率 $\bar{F}_z(0)$ は、それぞれ式(2)、(3)から得られるが、その際に次のような記号を導入する：

$$z_i^* = \frac{z_i}{\sigma_{z_i}}, \mu_i = \frac{\bar{z}_i}{\sigma_{z_i}}, V_i^* = \left(\frac{\sigma_{R_i}}{\sigma_{z_i}}\right)^2, V_i = \left(\frac{\sigma_{S_i}}{\sigma_{z_i}}\right)^2, B_i^* = \left(\frac{\sigma_{R_i}}{\sigma_{z_i}}\right)^2, B_i = \left(\frac{\sigma_{S_i}}{\sigma_{z_i}}\right)^2, \rho_{ij} = \frac{\rho_{R_i R_j} V_i V_j + \rho_{S_i S_j} V_i V_j}{\sqrt{V_i V_j + V_i^* V_j^*}} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (6)$$

ここに、 V_i および V_i^* はそれぞれ部材 i の強度および部材力の変動係数、 μ_i は部材 i の中央安全率、 $\rho_{R_i R_j}$ および $\rho_{S_i S_j}$ はそれぞれ部材 i および j の強度、部材力および破壊現象間の相関係数と呼ばれるものである。そして簡単な構造解析より、 $V_1^* = V_2^* = V_3^* = V^*$, $B_1^* = B_2^* = B_3^* = B^*$ ($V^* = \sigma_S^2 / \sigma_z^2$ は荷重 $S(t)$ の変動係数、 $B^* = \sigma_R^2 / \sigma_z^2$ である) となることを考慮し、さらに $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$, $V_1 = V_2 = V_3 = V$, $B_1 = B_2 = B_3 = B$, $\rho_{R_1 R_2} = \rho_{R_2 R_3} = \rho_{R_3 R_1} = \rho$, $\rho_{S_1 S_2} = \rho_{S_2 S_3} = \rho_{S_3 S_1} = \rho$ と仮定すると、この場合の構造物の破壊確率 $Q(T)$ の算定式は、式(5)から比較的簡単に次のようになる：

$$Q(T) = 1 - \frac{1}{2\pi(1-\rho)} \int_0^{\infty} \exp \left[\frac{-1}{2(1-\rho)} \left\{ (\bar{z}^* - \bar{z})^2 - 2\rho(\bar{z}^* - \bar{z})(z^* - \bar{z}) + (z^* - \bar{z})^2 \right\} \right] \left[1 - \Phi \left(\frac{-1}{\sqrt{(1-3\rho^2+2\rho^3)(1-\rho)}} \left\{ \rho(1-\rho)(z^* - \bar{z}) + (1-\rho)\bar{z} \right\} \right) \right] dz^* d\bar{z}^* \cdot \exp \left[-\frac{3T}{\sqrt{2\pi}(1-\rho)} \sqrt{\frac{B^* V^* + B V}{V^* V + V^* V^*}} \exp \left[\frac{-\bar{z}^2}{2(1-\rho)} \right] \right] \int_0^{\infty} \exp \left[\frac{-1}{2(1-\rho)} \left\{ (\bar{z}^* - \bar{z})^2 + 2\rho\bar{z}(\bar{z}^* - \bar{z}) \right\} \right] \left[1 - \Phi \left(\frac{-1}{\sqrt{(1-3\rho^2+2\rho^3)(1-\rho)}} \left\{ \rho(1-\rho)(\bar{z}^* - \bar{z}) + (1-\rho)\bar{z} \right\} \right) \right] d\bar{z}^* d\bar{z} \quad (7)$$

ここに、 $\bar{z} = \frac{\mu - 1}{\sqrt{V^* V + V^* V^*}}$, $\rho = \frac{B^* V^* + B V}{V^* V + V^* V^*}$, $\bar{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}u^2) du$ である。

4. 数値計算結果および考察 確率過程論に基づいて求めた静定トラスの破壊確率の値の方が、従来の静的信頼性理論による値よりも大きくなることがわかった。一例を図-3、4に示す。図-3、4はそれぞれすべての部材強度が変動係数 $V=0.17$ および $V=0.1$ を有する正規確率変数であり、荷重は相関関数 $K_{SS}(\tau) = \sigma_S^2 e^{-\alpha\tau}$ を有する正規定常確率過程である場合の破壊確率と中央安全率の関係を示したものである。部材強度の変動係数 V が大きくなると中央安全率 μ を大きくしても破壊確率が小さくならない。この傾向は耐用期間 T が大きいほど顕著である。また相関係数 ρ の影響が現れてくるのは $T=0$ で μ と V の比較的小さい値の場合で、 $T=1000(\text{days})$ の場合は ρ の影響はほとんど見られない。これは ρ による超過確率の時間密度 $P(0|t)$ の変化が非常に小さいことによるものと考えられる。

1) В. В. Болотин: Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. Стройиздат, Москва, 1971.

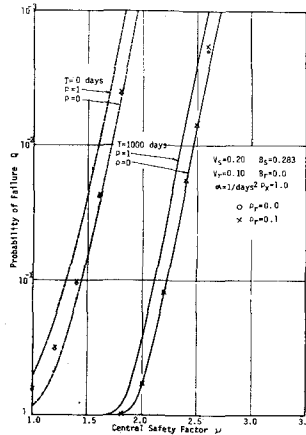


図-3

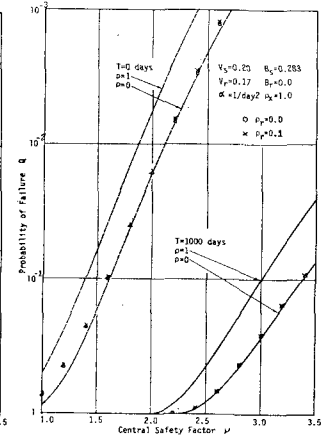


図-4