

I-5 単室箱桁の全体座屈

鳥取大学工学部 正員 神部 俊一
鳥取大学工学部 学生員 〇是澤 元博

1. まえがき

近年、高張力鋼の開発に伴って、橋梁の横断面は薄板をその構成要素として大型化していく傾向が見受けられる。これは、構造物の軽量化に大いに役立っているが、その反面、構造物の座屈による耐荷力の減少について十分な検討をする必要がある。薄肉構造物の座屈においては、ねじりを伴う全体座屈および板としての局部座屈などが問題になる。本報告では、保存力である外力が矩形断面を有する単室箱桁に作用する場合に生ずる不安定現象のうち分岐形の座屈について論ずる。また、断面の輪郭形状の変化(断面変形、ずり変形)を考慮に入れた解桁を V. Z. Vlasov の一般化座標法¹⁾に変分原理の一種である増分理論を適用して行なった。

2. 座屈平衡方程式の誘導

2-1 桁断面の変位場 図-1 に示すような二軸対称の矩形断面を有する単室箱桁を取り扱う。座標系は、図-2 に示す固定座標系 $O-x-y-z$ および物体座標系 $O'-x'-y'$ を用いる。また、変位の正の向きを図-3 の矢印で示す。

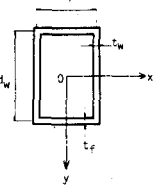


図-1

$$U(x,s) = \sum_{i=1}^m U_i(x) \varphi_i(s), \quad V(x,s) = \sum_{j=1}^n V_j(x) \psi_j(s), \quad W(x,s) = \sum_{k=1}^l V_k(x) \chi_k(s) \quad (1)$$

ここに、 m は面外変位の自由度の数を表し、 n は面内変位の自由度の数を表す。単室箱桁の場合は、 $m = n = 4$ である。

断面変形に起因する横方向曲げモーメントは、次のようである。

$$M(x,s) = \sum_{i=1}^n V_i(x) m_{si}(s) \quad (2)$$

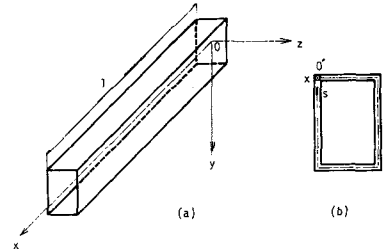


図-2

これは、接合線に沿って板要素の変位の連続条件より定まる。

一般化座標 $\varphi_i(s)$, $\psi_j(s)$, $\chi_k(s)$ は、次のように規定する。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(s) &= 1, \quad \varphi_2(s) = z(s), \quad \varphi_3(s) = y(s), \quad \varphi_4(s) = z(s) \cdot y(s) \\ \psi_1(s) &= \rho(s), \quad \psi_2(s) = dz(s)/ds, \quad \psi_3(s) = dy(s)/ds, \quad \psi_4(s) = d\{z(s) \cdot y(s)\}/ds \\ \chi_1(s) &= t(s), \quad \chi_2(s) = dy(s)/ds, \quad \chi_3(s) = dz(s)/ds, \quad \chi_4(s) = z(s) \cdot y(s) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに、 $\rho(s)$ は重心軸から断面の中心線までの距離を表す。 $t(s)$ は輪郭線上の接点から注目点までの距離を表す。ただし、反時計まわりを正の向きとする。

($\delta = \partial/\partial x$, ($\delta = \partial/\partial s$ なる記号を導入すると、応力成分は、Hooke の法則より次のようになる。

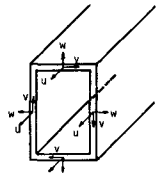


図-3

$$\sigma_x(x,s) = E \sum_{i=1}^m U_i(x) \varphi_i(s), \quad \tau_{xs}(x,s) = G \left(\sum_{i=1}^m U_i(x) \varphi_i'(s) + \sum_{j=1}^n V_j(x) \psi_j(s) \right) \quad (4)$$

2-2 座屈前の平衡方程式 座屈前の状態エネルギー⁽⁰⁾で表すと、仮想仕事の原理から次式が得られる。

$$\iint_{\Omega} (\sigma_x^{(0)} \delta \epsilon_x^{(0)} + \tau_{xs}^{(0)} \delta \gamma_{xs}^{(0)}) dF dx + \iint_{\Omega} \frac{m^{(0)}}{E I} \delta m^{(0)} ds dx - \iint_{\Omega} (P_x^{(0)} \delta u^{(0)} + Q_s^{(0)} \delta v^{(0)}) ds dx = 0 \quad (5)$$

式中、 I は板要素の桁軸方向の断面の単位長さ当りの慣性モーメント(I_{x2})、 $P_x^{(0)}$ は板要素の面内に作用する x 軸方向の外力、 $Q_s^{(0)}$ は板要素の面内に作用する s 軸方向の外力を意味する。

式(5)に式(1)(2)(4)を代入すると、座屈前の平衡方程式および境界条件が次のように与えられる。(\$\bar{P}_2^0, \bar{P}_2^0\$: 部材端力)

$$\left. \begin{aligned} E \sum_{k=1}^4 \left(\varphi_k \varphi_k dF U_k'' - G \sum_{k=1}^4 \left(\varphi_k \varphi_k dF U_k'' - G \sum_{k=1}^4 \left(\varphi_k \varphi_k dF V_k'' + \int_0^L \bar{P}_2^0 \varphi_k ds = 0 \right. \right. \right. \\ \left. \left. G \sum_{k=1}^4 \left(\varphi_k \varphi_k dF U_k'' + G \sum_{k=1}^4 \left(\varphi_k \varphi_k dF V_k'' - \int_0^L \frac{m_2 m_3}{E I} ds V_k'' + \int_0^L \bar{P}_2^0 \varphi_k ds = 0 \right. \right. \right. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left[E \sum_{k=1}^4 \left(\varphi_k \varphi_k dF U_k'' - \int_0^L \bar{P}_2^0 \varphi_k ds \right) (\delta U_k^0) \right]_0^L = 0, \quad \left[\left(G \sum_{k=1}^4 \left(\varphi_k \varphi_k dF U_k'' + G \sum_{k=1}^4 \left(\varphi_k \varphi_k dF V_k'' - \int_0^L \bar{P}_2^0 \varphi_k ds \right) (\delta V_k^0) \right) \right]_0^L = 0 \quad (7)$$

2-3 座屈平衡方程式 座屈変形を起した状態においては、それまでの変形様式とは質的に異なった変形様式に移るわけであるから非線形項を含むひずみ-変位関係式を用いる必要がある。また、不安定現象においては、面内変位が重要な役割を持つとし、面外変位の微係数の高次項を省略する。さらに、板要素は横方向に伸縮しないという仮定より、座屈変形状態におけるひずみ-変位関係式は次のようになる。(\$\varphi^L\$ は線形項, \$\varphi^N\$ は非線形項)

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^L + \varepsilon_x^N = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right], \quad \gamma_{xs} = \gamma_{xs}^L + \gamma_{xs}^N = \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial s} \quad (8)$$

分岐点ではわずかな外乱で異なる変形様式に移り、分岐点近傍を取り扱っていることに留意すると、増分理論より座屈変形の支配方程式は次のように表される。

$$\int_0^L (\delta \varepsilon_x^L \delta \varepsilon_x^L + \tau_{xs}^L \delta \gamma_{xs}^L) dF dx + \int_0^L \frac{m_1}{E I} \delta m ds dx + \int_0^L (\delta \varepsilon_x^N \delta \varepsilon_x^N + \tau_{xs}^N \delta \gamma_{xs}^N) dF dx = 0 \quad (9)$$

式(9)に式(1)(2)(4)(8)を代入して整理すれば、座屈平衡方程式と境界条件が次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} E \sum_{k=1}^4 \left(\varphi_k \varphi_k dF U_k'' - G \sum_{k=1}^4 \left(\varphi_k \varphi_k dF U_k'' - G \sum_{k=1}^4 \left(\varphi_k \varphi_k dF V_k'' = 0 \right. \right. \right. \\ \left. \left. G \sum_{k=1}^4 \left(\varphi_k \varphi_k dF U_k'' + G \sum_{k=1}^4 \left(\varphi_k \varphi_k dF V_k'' - \int_0^L \frac{m_2 m_3}{E I} ds V_k'' + \left[\int_0^L \delta \varepsilon_x^N \varphi_k \varphi_k dF V_k'' + \left[\int_0^L \tau_{xs}^N \varphi_k \varphi_k dF V_k'' - \int_0^L \tau_{xs}^N \varphi_k \varphi_k dF V_k'' = 0 \right. \right. \right. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left[E \sum_{k=1}^4 \left(\varphi_k \varphi_k dF U_k'' (\delta U_k^0) \right) \right]_0^L = 0, \quad \left[\left(G \sum_{k=1}^4 \left(\varphi_k \varphi_k dF U_k'' + G \sum_{k=1}^4 \left(\varphi_k \varphi_k dF V_k'' + \int_0^L \delta \varepsilon_x^N \varphi_k \varphi_k dF V_k'' + \int_0^L \tau_{xs}^N \varphi_k \varphi_k dF V_k'' - \int_0^L \tau_{xs}^N \varphi_k \varphi_k dF V_k'' \right) (\delta V_k^0) \right) \right]_0^L = 0 \quad (11)$$

3. 数値計算例

数値計算例として次の断面緒元 (\$d_f = 600(\text{mm}), d_w = 340(\text{mm}), t_f = 19(\text{mm}), t_w = 12(\text{mm}), I = 40(\text{cm}^4), E = 2.1 \times 10^6(\text{kg/cm}^2), \nu = 0.3)\$ を有する単壁箱桁を採用して、これに Galerkin 法を適用して座屈荷重を求め以下に示す結果を得た。

- ① 両端固定の箱桁の上フランジと腹板の接合線の片側に等分布荷重が鉛直下方に作用している場合: \$q_0 = 20000(\text{kg/m})\$
- ② 両端固定の箱桁の上フランジと腹板の接合線の片側に等分布荷重が、フランジに \$45^\circ\$ の角度をなす方向に作用している場合: \$q_0 = 9000(\text{kg/m})\$
- ③ 単純支持の箱桁の両端に \$z\$ 軸まわりの曲げモーメントが作用する場合: \$M_0 = 3100000(\text{kg}\cdot\text{m})\$

4. あとがき

閉断面の場合の座屈平衡方程式の特徴は、ずり変位(断面内のゆがみ)の項を含むことであり、開断面の座屈平衡方程式にはない項である。開断面の座屈平衡方程式は、各変位成分と連成した2階の線形同次常微分方程式になる。数値計算の結果では、座屈荷重としては非常に大きな値になった。座屈荷重を表わす式において、開断面と閉断面の両方の場合にねじり定数が大きな要因として表れる。薄肉開断面の場合のねじり定数の値は、それにケプストリットを入れて閉断面とした場合のねじり定数の値と比べておよそ数千倍になる。このことが閉断面の場合、座屈荷重が大きくなった原因と考えられる。したがって、現在実用に供される箱桁では、全体座屈よりも局部座屈の方が優先すると思われる。

- 参考文献
1. V.Z.Vlasov: 奥村敏恵 外訳 “薄肉弾性ばりの理論”, 技報堂 1967
 2. 川井 忠彦: “座屈問題解析”, コンピューターによる構造工学解析 II-6-B 培風館 1974