

愛媛大学工学部 正員 見沢繁光
 徳山商専 正員 重松恒美
 愛媛大学大学院 学生員 大賀水田生

1. まえがき

従来、板の歪屈解析は Timoshenko¹⁾により解かれているが、本研究では、理論体系がわかりやすく、計算手順が機械的である伝達マトリックス法を用いて板の歪屈解析、及び従来の解との比較検討を行なう。適用例として、一方向圧縮荷重を受け、荷重の方向に垂直な二辺は単純支持され、他の二辺は任意に支持された板の歪屈解析を行なう。

2. 伝達マトリックスの誘導

図-1に示されているような支持状態の板の歪屈解析に対する伝達マトリックスを Kirchhoff の仮定にしたがって誘導する。一軸圧縮荷重を受ける板の基礎方程式は次式で与えられている。(図-2(a), (b) 参照)

$$\Delta \Delta w = -\frac{P_x}{D} w'' \quad (1)$$

ここに D : 曲げ剛性, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $' = \frac{\partial}{\partial x}$

図-1に示されるように $x=0, a$ で単純支持されている場合、たわみ w は次の形で表わすことができる。

$$w = \bar{w}(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (2)$$

ここに $\bar{w}(y)$ は独立変数 y のみの関数であり、式(2)を式(1)に代入すると式(1)は次のような y に関する4階微分方程式となる。

$$\bar{w}'''' - \frac{2m^2\pi^2}{a^2} \bar{w}'' + \left(\frac{m^4\pi^4}{a^4} - \frac{P_x m^2\pi^2}{D a^2} \right) \bar{w} = 0 \quad (3)$$

ここに $\bullet = \frac{\partial}{\partial y}$

式(3)を解くと $\bar{w}$ は次のようになる。

$$\bar{w} = C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y \quad (4)$$

ここに C_i : 積分定数

$$\alpha = \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{P_x m^2\pi^2}{D a^2}}, \quad \beta = \sqrt{-\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{P_x m^2\pi^2}{D a^2}}$$

たわみ w , たわみ角 φ_x, φ_y , モーメント M_y , 換算せん断力 $V_y = M_{xy} + Q_y$ の関係は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &= -w', & \varphi_y &= -w' \\ M_y &= D(\varphi_y' + \nu \varphi_x') \\ V_y &= D(\varphi_y'' + (2-\nu)\varphi_x'') \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

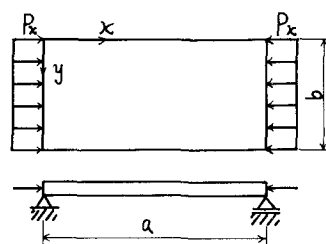


図-1 支持状態

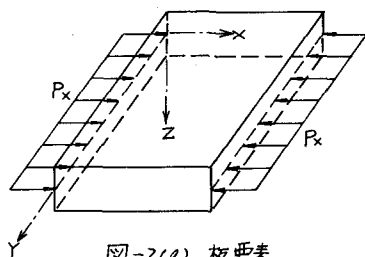


図-2(a) 板要素

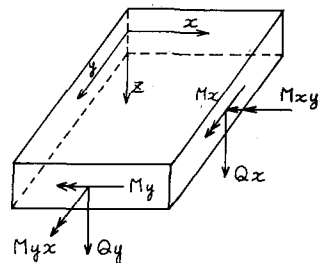


図-2(b) 板要素

表-1 支持条件

1	固定支持		$w = \varphi_y = 0$
2	単純支持		$w = M_y = 0$
3	自由		$M_y = V_y = 0$

式(2)を式(5)に代入すると φ_x, φ_y などの y のみの項は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \overline{\varphi}_y &= -\overline{w}''', & \varphi_x &= -\left(\frac{m\pi}{a}\right) \overline{w} \\ \overline{M}_y &= -\overline{w}'' + \nu \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \overline{w} \\ \overline{V}_y &= -\overline{w}''' - \left[(1-\nu) \frac{m\pi}{a} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right] \overline{w}'' \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(4)を式(6)に代入し、マトリックス表示すると次のようになる。

$$[Z] = [A][C] \quad (7)$$

ここに $[Z]$: 状態量ベクトル

さらに、積分定数 $[C]$ を $y=0$ における状態量ベクトル $[Z_0]$ で表わし、式(7)に代入すれば次のようになる。

$$[Z] = [A][A]^{-1}[Z_0] \quad (8)$$

式(8)を整理すると、最終的に次のようになり、

$$\begin{pmatrix} \overline{w} \\ \overline{\varphi}_y \\ \overline{M}_y \\ \overline{V}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & \\ F_{31} & F_{32} & & \\ F_{41} & & \text{Simetric} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{w}_0 \\ \overline{\varphi}_{y0} \\ \overline{M}_{y0} \\ \overline{V}_{y0} \end{pmatrix} \quad (9)$$

一方向圧縮力を受け、その方向に垂直な二辺は単純支持され、他の二辺は任意に支持されている板の左端 ($y=0$) の状態量を右端 ($y=b$) に伝達する伝達マトリックスが誘導される。

3. 数値計算とその結果

支持条件は表-1に示されるように固定支持、単純支持、自由の3種類であり、したがって、支持状態としては表-2に示されるように計8種類が考えられる。次にそれぞれの支持状態について、境界条件を考慮し、座屈条件式を求め、二分法により座屈条件式の根、つまり座屈係数を求めた。得られた結果は、従来解かれている解 (L_{11}, L_{22} etc.) と一致している。図-3.4に得られた結果を示している。

4. 結言

従来、偏微分方程式と解くことが煩雑であった問題を、計算機に適した方法である伝達マトリックスを用いて簡単に解くことができた。しかし、計算機で座屈条件式の根を求める際、桁落ちのため高精度計算では満足する結果が得られない場合もあり、倍精度、4倍精度計算を行なうことが必要である。なお、現在、せん断変形を有する板の座屈解析への適用を検討中である。

<参考文献> Timoshenko, Gere: Theory of Elastic Stability, McGRAW-HILL

② Walter Wurmnest: Zur Theorie schubelastischer Platten; Stabilität von Rechteckplatten, Darmstadt 1970

表-2 支持状態の種類

$y=b$ $y=0$	1	2	3
1	L_{11}	L_{12}	L_{13}
2		L_{22}	L_{23}
3			L_{33}

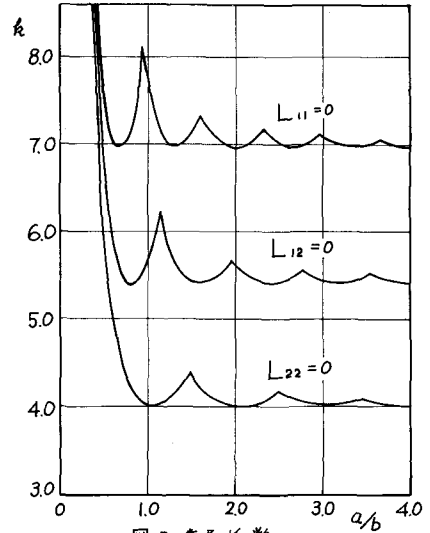


図-3 座屈係数

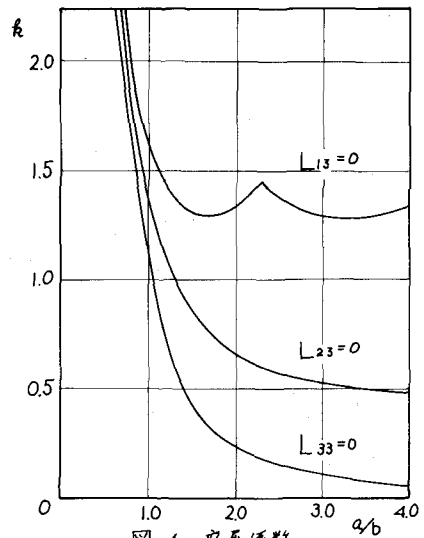


図-4 座屈係数