

1-1 変形を考慮した平面骨組の解析に関する二、三の考察

徳島大学工学部 正会員 児嶋 弘行

〃 〃 平尾 潔

四国建設コンサルタント 〃 〇吉崎 和人

1. まえがき 幾何学的非線形性を考慮した平面骨組の弾性解析法については、はり-柱理論に基づく解法や、エネルギー原理に基づく解法などの多くの研究例がすでに報告されている。しかしながら、これらの各解析法については、西野¹⁾が基本式の誘導の面からそれらの精度について考察を加えているだけであり、具体的な数値計算結果をもとに比較検討した研究例はみあたらない。したがって、本研究では、これらの既往の解析法のうちから代表的なものをえらび、それらの解析法について研究し、二、三の梁に対する計算例を示し、これらの各解析法による解析結果の相違などを比較し、簡単な考察を加えてみたものである。

なお、本文では表現を簡単にするため、はり-柱理論に基づく文献¹⁾、²⁾、³⁾の解法を secant 法、Oran 法、Texcan 法と呼び、エネルギー原理に基づく文献⁴⁾、⁵⁾をひずみエネルギー法、厳密解法と呼ぶことにする。また、厳密解法で、ひずみおよび変位に制限を設けない場合を解法Ⅰ、微小ひずみの制限を設けた場合を解法Ⅱ、微小ひずみで微小変位の制限を設けた場合を解法Ⅲと呼ぶことにする。以下に各解析法の概略を述べる。

2. 厳密解法 厳密な変位場を仮定して、ひずみエネルギーをもとめ、仮想仕事の原理より支配方程式を誘導し、これらを積分表示して、式(1)~(3)に示すような節点力と回転角の関数 f を用いて、式(4)を満足するような回転角 α_i 、 α_j を試算法により求める解法。なお、本研究では、式(4)の積分を行う場合、部材を480分割して、シンプソン公式を用いた。

$$\text{解法Ⅰ} \quad f = \pm \left[\frac{(M_{ij})^2}{EI} + \frac{2N_{ij}}{EI} (\cos \alpha - \cos \alpha_i) + \frac{2V_{ij}}{EI} (\sin \alpha - \sin \alpha_i) - \frac{1}{AIE} \left\{ N_{ij} V_{ij} (\sin 2\alpha - \sin 2\alpha_i) + \frac{N_{ij}^2 - V_{ij}^2}{2} (\cos 2\alpha - \cos 2\alpha_i) \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$\text{解法Ⅱ} \quad f = \pm \left\{ \frac{(M_{ij})^2}{EI} + \frac{2N_{ij}}{EI} (\cos \alpha - \cos \alpha_i) + \frac{2V_{ij}}{EI} (\sin \alpha - \sin \alpha_i) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

$$\text{解法Ⅲ} \quad f = \pm \left\{ \frac{(M_{ij})^2}{EI} + \frac{N_{ij}}{EI} (\alpha_i^2 - \alpha^2) + \frac{2V_{ij}}{EI} (\alpha - \alpha_i) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

$$l_{ij} = \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} \frac{1}{f} d\alpha \quad (l_{ij}: \text{原形の部材長}) \quad (4)$$

3. ひずみエネルギー法 部材のひずみエネルギーを材端変位の関数として表わし、これを変位で1回偏微分して得られる材端力と材端変位の関係式、ならびに、2回偏微分して得られるそれらの増分関係式を用いて、接線剛性法により解析する方法。

4. 修正ひずみエネルギー法 図-1に示すように座標系をとって、部材のひずみエネルギーを部材変形の関数で表わし、Oranの座標変換行列を用いて、ひずみエネルギー法を修正した解析方法。

5. Secant法 図-2に示すように部材の変形前の方向に材端力を取り、軸力による付加モーメントを考慮して、曲げに対する微分方程式より誘導した、せん断力と曲げモーメントに対する式(5)、および、軸力に対する式(6)を用いて、直接法により解析する方法。

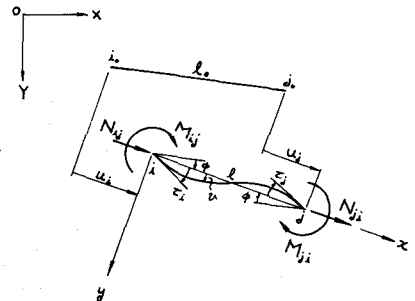


図-1

$$\left. \begin{aligned} Q_{ij} &= \frac{12EI}{l_o^3} \cdot \varphi_o \cdot (v_i - v_j) + \frac{6EI}{l_o^2} \cdot \varphi_o \cdot (\theta_i + \theta_j) \\ M_{ij} &= \frac{6EI}{l_o^2} \cdot \varphi_o \cdot (v_i - v_j) + \frac{4EI}{l_o} \cdot \varphi_o \cdot \theta_i + \frac{2EI}{l_o} \cdot \varphi_o \cdot \theta_j \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$N_{ij} = \frac{EA}{l_o} (u_i - u_j) \quad (6)$$

6. Oran法 図-3のように部材の変形後の方向に材端力を取り、5.のSecant法と同様にして誘導したせん断力と曲げモーメントに対する式(7)、および、部材の湾曲(bowing)に伴う軸方向変位の影響を考慮した軸力に対する式(8)と、これらの増分関係式を用いて接線剛性法による解法。

$$\left. \begin{aligned} Q_{ij} &= \frac{6EI}{l} \cdot \varphi_o \cdot (z_i + z_j) \\ M_{ij} &= \frac{4EI}{l} \cdot \varphi_o \cdot z_i + \frac{2EI}{l} \cdot \varphi_o \cdot z_j \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ただし、 $z_i = \theta_i - \phi$ 、 $z_j = \theta_j - \phi$ 、 $\phi = (v_i - v_j)/l_o$ 。

$$N_{ij} = \frac{EA}{l_o} \{ l_o - l(1 + C_b) \} \quad (8)$$

7. Tezcan法 Oran法におけるせん断力と曲げモーメントの式で $\phi = \sin^{-1}(v_i - v_j)/l_o$ とし、増分関係式の誘導では、 C_b を一定としたOran法と同様な解法。

8. 修正Secant法 せん断力と曲げモーメントに対する式(7)を用い、軸力に対しては、式(8)で $C_b = 0$ としてララー展開した式(9)を用いて、直接法による解法。

$$N_{ij} = \frac{EA}{l_o} \left\{ (u_i - u_j) + \frac{(v_i - v_j)^2}{2l_o} \right\} \quad (9)$$

9. 計算例 図-4に示すような荷重状態の片持ばり、および、単純ばりに対する各解析法による解析結果を、講演当日スライドで紹介する。

10. むすび 各解法による解析結果より、つぎのようなことがあきらかとなった。1) 厳密解法では、必ずみかおよび変位に制限のない解法Ⅰと微小ひずみ制を設けた解法Ⅱとの解析結果はよく一致する。しかしながら、微小ひずみで小変位の制限を設けた解法Ⅲでは、オイラー値に近づくにつれ解法Ⅰ(Ⅱ)との差は大きくなる。2) 厳密解法では、解析対象が棒のような帯組要素に限定され、また、他の解析法に比べて多くの演算時間が必要である。3) 軸力を受ける梁の鉛直変位については、軸力がオイラー値に近づくまで、各解析法の結果はよく一致するが、オイラー値に近づくにしたがって、解法Ⅰ、Ⅱと他の解析法との差は大きくなる。4) 軸力を受ける梁の水平変位については、各解析法で差が生じているが、Tezcan法、修正Secant法は解法Ⅰ、Ⅱと一致する。5) 部材の分割数を増すほど解の精度は良くなる傾向にあるが、必要以上に分割を多くしても解の精度はそれほど上らず、演算時間の面で不利となる。

参考文献

- 1) R, K, リブスレイ著, 山田, 川井共訳 「マトリックス構造解析入門」 培風館
- 2) C, Oran "Tangent stiffness in Plane Frames" ASCE, Vol. 99, ST6, 1973
- 3) S, Tezcan "Numerical Solution of Non-linear Structures" ASCE, Vol. 94, ST6, 1968
- 4) 大地羊三 「構造解析とコンピュータ」、コンピュータサイエンスシリーズ、産業図書
- 5) 西野, 倉方, 後藤 「一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論」, 土木学会論文報告集, 第237号, 1975

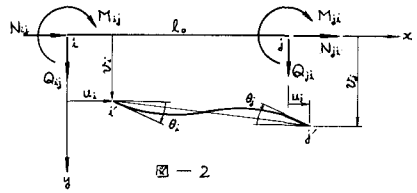


図-2

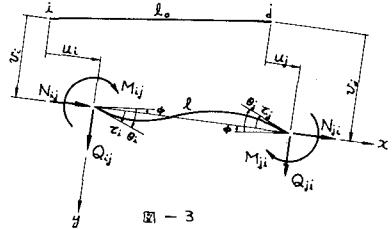
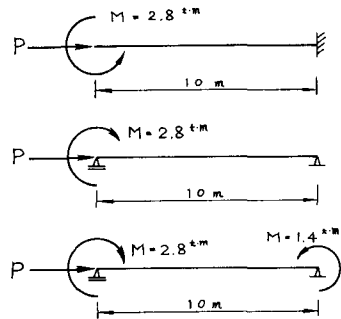


図-3



$A = 62.08 \text{ cm}^2$ $I = 4610.49 \text{ cm}^4$ $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$

図-4