

1. はしがき

斜面内の定常降雨による水深分布形状ならびに貯留量の一般的な性状を明らかにすることは、傾斜地における地下水位の算定あるいは降雨による流出源の涵養量の算出、さらには流出解析における初期条件設定への基礎的な資料を提供するという点で極めて重要な事項である。

そこで、ここでは、これらの事項について考察した結果を述べる。

2. 基礎方程式

山腹斜面のような実際の斜面は形状的にも性質的にも複雑に変化しており、微視的に見れば取り扱いを単純化して考えることには向題も残るが、巨視的に見れば多くの場合基礎方程式中に含まれる特性量を適当に選ぶことにすれば、つぎのような単純モデル化した取り扱いも十分可能であると考えられる。すなわち、1) 斜面は一定こう配を有する均質等方性の直線斜面である。2) 斜面内の雨水の流動はDarcy則にしたがう一次元飽和流である。このように単純モデル化した斜面において一定強度の降雨が降り続いて定常化した場合の雨水流動の基礎方程式および斜面内の貯留量は斜面の上流端が非流出端であることを考慮すると結局それぞれ(1)式および(2)式のように表わされる。

$$kh \left(\tan \theta - \frac{dh}{dx} \right) = r x \quad (1)$$

$$s = \int_0^l m h dx \quad (2)$$

ここに、 x , l はそれぞれ上流端を原点として斜面流下方向に測った距離および斜面長、 h は斜面に直角上方に測った水深、 θ は斜面傾斜角、 k , m はそれぞれ斜面内の代表透水係数および代表空隙率、 r は降雨強度、 s は貯留量である。

(1)式および(2)式は(3)式のような無次元量を用いて表わすと、それぞれ(4)式および(5)式のように表わされる。

$$X = x/l, H = h/l, R = r/k \quad S = \frac{s}{m l^2} \quad (3)$$

$$H \frac{dH}{dX} - \tan \theta H + R X = 0 \quad (4)$$

$$S = \int_0^1 H dX \quad (5)$$

さらに、 $U = H/X$ のように変数変換すると雨水流動の基礎方程式は(6)式のように表わされる。

$$\ln X = - \int \frac{U dU}{U^2 - \tan \theta U + R} \quad (6)$$

3. 水深分布式とその計算方法

水深分布形は結局(6)式を解くことによって求められるが、この(6)式の解は右边分母の判別式

$$D = \tan^2 \theta - 4R \quad (7)$$

の正負によって3ケースに分かれる。そこで、境界条件として下流端水深 $H_l (= h_l/l)$ を与えることにすれば特異点である上流端を除いた場所においては、一般にそれぞれ以下のように表わすことができる。

1) $D > 0$ の場合

$$\left| \frac{H - (\alpha + \beta)X}{H_l - (\alpha + \beta)} \right| = \left| \frac{H - (\alpha - \beta)X}{H_l - (\alpha - \beta)} \right|^{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} \quad (8)$$

2) $D = 0$ の場合

$$\left| \frac{H - \alpha X}{H_l - \alpha} \right| = \frac{\exp\left(-\frac{\alpha X}{H - \alpha X}\right)}{\exp\left(-\frac{\alpha}{H_l - \alpha}\right)} \quad (9)$$

3) $D < 0$ の場合

$$\frac{H^2 - 2\alpha H X + R X^2}{H_l^2 - 2\alpha H_l + R} = \exp \left[\frac{2\alpha}{\beta'} \left\{ \arctan \left(\frac{H_l - \alpha}{\beta'} \right) - \arctan \left(\frac{H - \alpha X}{\beta' X} \right) \right\} \right] \quad (10)$$

$$\text{ただし、} \alpha = \tan \theta / 2, \beta = \sqrt{D} / 2, \beta' = \sqrt{-D} / 2 \quad (11)$$

ところが、これらの水深分布式はいずれも陰関数であるから、具体的な分布形を求めるためには繰り返し計算を行なって決定せざるを得ない。そこで、つぎにその繰り返し計算方法について述べる。

1) $D > 0$ の場合、(8)式には(12)式で表わされるよう

と2本の漸近線があり、計算領域はこの漸近線によって3分割されることになるが水深分布の連続性を考慮すると分布形はこのように3分割された各領域内で決定されなければならない。したがって、この場合の水深分布形は限定された領域内において、たとえば(14)式によって解の精度を調べながら(13)式を用いて繰り返し計算することによって決定することができる。

$$H = (\alpha - \beta)X, \quad H = (\alpha + \beta)X \quad (12)$$

$$H^{m+1} = (\alpha + \beta)X + \{H_1 - (\alpha + \beta)\} \left\{ \frac{H^m - (\alpha - \beta)X}{H_1 - (\alpha - \beta)} \right\}^{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} \quad (13)$$

$$(H^{m+1} - H^m) / H^{m+1} \ll \varepsilon \quad (14)$$

ただし、 H^m 、 H^{m+1} はそれぞれ n 回、 $(m+1)$ 回繰り返し計算を行なって求めた H の値であり、 ε は所要の相対誤差である。

2) $D = 0$ の場合、同様に計算領域は(15)式のような1本の漸近線によって2分割されるから、その限定された各領域内で(14)式および(16)式を用いて繰り返し計算を行なうことによって決定することができる。

$$H = \alpha X \quad (15)$$

$$H^{m+1} = \alpha X + (H_1 - \alpha) \frac{\exp\left(\frac{\alpha X}{H^m - \alpha X}\right)}{\exp\left(\frac{\alpha}{H_1 - \alpha}\right)} \quad (16)$$

3) $D < 0$ の場合、 H の正の領域で(14)式および(17)式を用いて繰り返し計算することによって決定することができる。

$$H^{m+1} = \alpha X + \left\{ (\alpha^2 - R)X^2 + (H_1^2 - 2\alpha H_1 + R) \right. \\ \left. \times \exp\left\{ \frac{2\alpha}{\beta^2} \left\{ \arctan\left(\frac{H_1 - \alpha}{\beta}\right) - \arctan\left(\frac{H^m - \alpha X}{\beta X}\right) \right\} \right\} \right\}^{1/2} \quad (17)$$

演算時間の面からしても、必要な任意地点の水深が直接計算できるという点からしても、この計算方法による方がルンゲ・クッタ法のような直接数値積分法よりも優れているといえる。

4. 上流端水深

特異点である上流端($X=0$)における水深 H_0 は水深分布形の連続性を考えて各区分領域内で(13)式、(16)式および(17)式において $X=0$ として計算した値と一致すべきであり、それぞれ以下のように表わすことができる。

1) $D > 0$ の場合

$$\left. \begin{array}{ll} H_1 \leq (\alpha + \beta) \text{ の時} & H_0 = 0 \\ H_1 > (\alpha + \beta) \text{ の時} & H_0 = \frac{\{H_1 - (\alpha + \beta)\}^{\frac{\alpha + \beta}{2\beta}}}{\{H_1 - (\alpha - \beta)\}^{\frac{\alpha - \beta}{2\beta}}} \end{array} \right\} \quad (18)$$

2) $D = 0$ の場合

$$\left. \begin{array}{ll} H_1 \leq \alpha \text{ の時} & H_0 = 0 \\ H_1 > \alpha \text{ の時} & H_0 = \frac{(H_1 - \alpha)}{\exp\left(\frac{\alpha}{H_1 - \alpha}\right)} \end{array} \right\} \quad (19)$$

3) $D < 0$ の場合

$$H_0 = (H_1 - 2\alpha H_1 + R)^{1/2} \cdot \exp\left[\frac{\alpha}{\beta} \left\{ \arctan\left(\frac{H_1 - \alpha}{\beta}\right) - \frac{\pi}{2} \right\}\right] \quad (20)$$

5. 最大水深および発生源

水深分布形の特性量の1つである最大水深 H_m ならびにその発生源 X_m を明らかにすることは解析結果の利用という面からも重要である。そこで、まず水深分布形の極値点を調べてみると、極値点においては(4)式から一般に(21)式が成り立ち、さらに、この点における dH/dX^2 は(22)式のようになる。

$$H = \frac{R}{2\alpha} X \quad (21) \quad \frac{d^2 H}{dX^2} = -\frac{R}{H} \quad (22)$$

ところが、(22)式は一般に負であるからこの点は極大点となるが、水深分布式はすべて単調変化をするから極大点が存在する場合には極大点が最大点となり、存在しない場合には一般に下流端水深が最大水深となる。したがって各場合の最大水深 H_m およびその発生源 X_m はそれぞれ以下のようになる。

1) $D > 0$ の場合

$$\left. \begin{array}{l} H_1 < (\alpha - \beta) \text{ の時} \\ X_m = \left\{ \frac{H_1 - (\alpha + \beta)}{\frac{R}{2\alpha} - (\alpha - \beta)} \right\}^{\frac{\alpha + \beta}{2\beta}} \cdot \left\{ \frac{R}{2\alpha} - (\alpha - \beta) \right\}^{\frac{\alpha - \beta}{2\beta}} \\ H_m = \frac{R}{2\alpha} X_m \end{array} \right\} \quad (23)$$

$H_1 \geq (\alpha - \beta)$ の時

$$X_m = 1.0, \quad H_m = H_1 \quad (24)$$

2) $D = 0$ の場合

$$\left. \begin{array}{l} H_1 < \alpha \text{ の時} \\ X_m = \frac{2(\alpha - H_1)}{\alpha} \cdot \frac{\exp(-2)}{\exp\left(\frac{\alpha}{H_1 - \alpha}\right)}, \quad H_m = \frac{\alpha}{2} X_m \\ H_1 > \alpha \text{ の時} \end{array} \right\} \quad (25)$$

$$X_m = 1.0, \quad H_m = H_1 \quad (26)$$

3) $D < 0$ の場合

$$X_m = \frac{2\alpha}{R} (H_1^2 - 2\alpha H_1 + R)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp \left[\frac{\alpha}{\beta} \left\{ \arctan \left(\frac{H_1 - \alpha}{\beta} \right) - \arctan \left(\frac{R - 2\alpha^2}{2\alpha\beta} \right) \right\} \right]$$

$$H_m = \frac{R}{2\alpha} X_m \quad (27)$$

6. 貯留量および有効貯留

(5)式によって表わされる貯留量 S は(4)式を上流端から下流端まで積分して整理することにより一般に(28)式のように表わされる。

$$S = \frac{R}{4\alpha} \left\{ 1 - \frac{H_1^2 - H_0^2}{R} \right\} \quad (28)$$

また、下流端水深 H_1 が流出に必要な最小水深より大きい場合には下流端は一種の堰上げ作用をすることになるから、この下流端水深 H_1 より高い水位の貯留水を有効貯留 S_e とすれば、 S_e は(29)式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} H_1 < 2\alpha \text{ の時 } \quad S_e &= \frac{R}{4\alpha} \left\{ 1 + \frac{H_1^2}{R} \right\} \\ H_1 \geq 2\alpha \text{ の時 } \quad S_e &= \frac{R}{4\alpha} \left\{ 1 - \frac{H_1^2 - H_0^2 + 4\alpha(H_1 - \alpha)}{R} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ところが、自由流出端を有する通常の斜面流出の場合のように $H_1 = 0$ の場合を含めて(30)式が成立するような状態においては S あるいは S_e はさらに簡単に(31)式のように表わされる。したがって、貯留量は降雨量に比例する傾向が極めて強くなるのがわかる。

$$|H_1^2 - H_0^2| / R \ll 1 \quad (30) \quad S, S_e = \frac{R}{4\alpha} \quad (31)$$

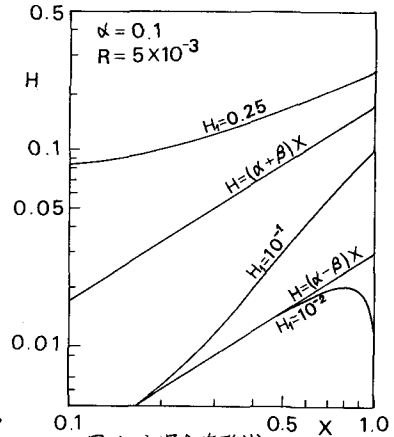
7. 水深分布形および貯留量の変化性状

図・1は3. 4. で述べた方法によって $D > 0$ の場合について算出した水深分布形状の一例を示したものである。図からわかるように下流端近傍以外の点においては一般に直線性が強く、分布形の直線近似の可能性が十分に予想される。また、図・2は5. で述べた式によって算出した一例を示したものであり、 H_m は斜面傾斜が大きく降雨強度が小さいものほど小さく、発生点 X_m は下流端に近づくことがわかる。さらに図・3は6. で述べた式を用いて算出した貯留量の一例を示したものである。図からわかるように斜面における貯留量 S と降雨強度 R との関係は一般に両対数紙上で2本程度の直線で近似し得ると同時に、山腹斜面からの自由流出のように(30)式が成立する程度の小さな降雨強度の場合には S は R に比例し、斜面こう配の2倍に逆比例する。

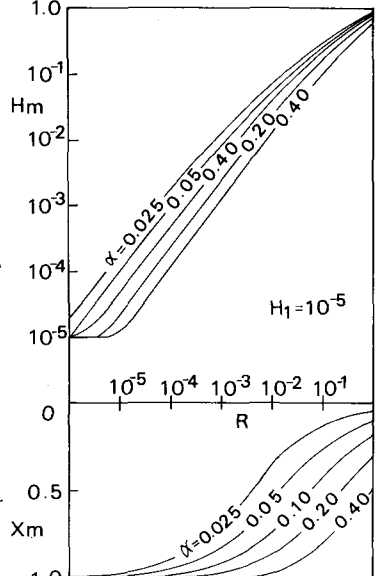
8. あとがき

以上斜面内の定常水深分布形状ならびに貯留量の性状について解析的に明らかにしたが、今後これらの事項について実験的にも明らかにしていく予定である。

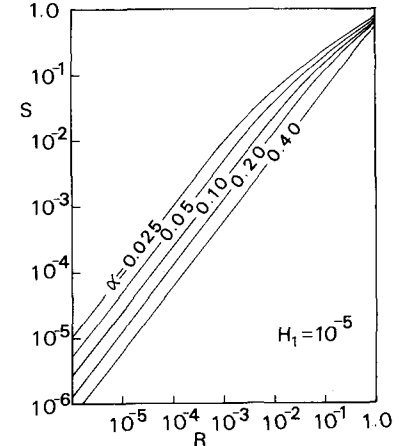
参考文献 1) 森口繁一, 宇田川経久, 一松信: 数学公式I, 岩波全書, 1970



図・1 水深分布形状



図・2 最大水深および発生点



図・3 貯留量