

1-2 層別サンプリングによる不静定ケーブル構造物の破壊確率の推定

徳島大学工学部 正員 宇都宮英彦
 正員 沢田 勲
 徳島大学大学院 学主員 泰地 重敏

1. まえがき

不静定構造物においては、一部の部材の破壊が必ずしも構造物全体としての崩壊を意味しない。すなわち、このような構造物は、一部の部材の破壊後残存している部材に荷重の再分配が生じるため、作用荷重を支えることができ、構造物としての機能を失わない。不静定構造物の信頼性を算定するには、破壊経路の追跡をおこなう必要が生じる。⁽¹⁾⁽³⁾ しかしこのような破壊経路は非常に複雑であり、数値積分では非常に長い時間と必要とする。本研究は、モンテカルロ法に層別サンプリングの手法を用いてより簡単に、かつ精度よく不静定構造物の信頼性解析をおこなうものである。

2. 層別サンプリングの原理

まず、説明を簡単にするため図-2の構造物において2部材の場合を考える。荷重 S_j の分布において、 $S_{0j} \leq S_j$ が生じる確率が $(1-p_j)$ になるように適当な確定値 S_{0j} 、 $j=1, 2$ に対して、 $G_{ij} = C_{ij} \cdot S_j$ の関係より生じる応力 G_{ij} より R_i の確定値 R_{0i} を

$$R_{0i} = \max C_{ij} \cdot S_{0j} \quad (1)$$

として選ぶ、 $(1-g_i)$ を R_i が R_{0i} よりも小さくなる確率とする。これを図示したものが図-1である。

このような S_{0j} 、および R_{0i} を選ぶと式(1)より $(S_j < S_{0j}, j=1, 2)$ 、および $(R_{0i} < R_i, i=1, 2)$ が同時に生じる場合には、破壊の事象 $(S > R)$ は生ぜず、これらは全体のサンプリング範囲から除去される。層別サンプリングはこのような原理にもとづくものであり、事象 $(S_j < S_{0j}, j=1, 2)$ 、および $(R_{0i} < R_i, i=1, 2)$ が同時に生起する確率、すなわち破壊の事象を含まない範囲の確率は、荷重、および部材強度の独立性の仮定により、次のようになる。

$$P[(\bigcap_{j=1}^n S_j < S_{0j}) \cap (\bigcap_{i=1}^n R_{0i} < R_i)] = \prod_{j=1}^n p_j \cdot \prod_{i=1}^n g_i \quad (2)$$

したがって、層別サンプリングによる試行回数 N は次式により与えられる。

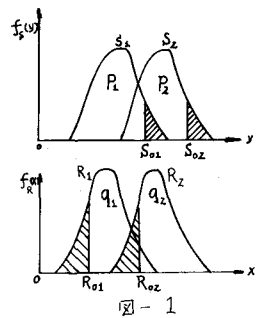
$$N = (1 - \prod_{j=1}^n p_j \cdot \prod_{i=1}^n g_i) \cdot N_e \quad (3)$$

ここで N_e は一般のモンテカルロ法を用いた場合に必要の試行回数である。また荷重、および部材強度の確定値 S_{0j} 、 R_{0i} は、荷重、および部材強度の独立性の仮定より、式(2)が最大になるように計算機内で自動的に決定する。このようにして決定された S_{0j} 、 R_{0i} に対応する確率 p_j 、 g_i は1に非常に近い値となるため、試行回数 N は一般のモンテカルロ法を用いた場合に必要の試行回数 N_e の数十分の一から数百分の一にもなり、試行回数の大幅な減少が可能となる。

これをより具体的に説明すると次のようになる。 $S_j, j=1, 2$ 、および $R_i, i=1, 2$ のサンプリング範囲をそれぞれ次のように分割する。

$$\left. \begin{aligned} S_j &: (S_j < S_{0j}), (S_{0j} \leq S_j) \\ R_i &: (R_i \leq R_{0i}), (R_{0i} < R_i) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

また、式の表現を簡単にするために、 S_j 、および R_i のそれぞれの全分布範囲を E_{Sj} 、および E_{Ri} で表わせば、層別サンプリングでは、すべての S_j 、および R_i から構成される全サンプリング範囲は次のような互いに排反



な区間に分割される

$$\left. \begin{aligned} A_1: (S_{01} \leq S_1) \cap E_{S2} \cap E_{R1} \cap E_{R2} & \quad A_2: (S_1 < S_{01}) \cap (S_{02} \leq S_2) \cap E_{R1} \cap E_{R2} \\ A_3: (\bigcap_{j=1}^n S_j < S_{0j}) \cap (R_1 \leq R_{01}) \cap E_{R2} & \quad A_4: (\bigcap_{j=1}^n S_j < S_{0j}) \cap (R_{01} < R_1) \cap (R_2 \leq R_{02}) \\ A_5: (\bigcap_{j=1}^n S_j < S_{0j}) \cap (\bigcap_{i=1}^n R_{0i} < R_i) & \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$A_k, k=1, 2, \dots, 5$ は互いに排反であり、 A_5 は破壊の事象を含まないからサンプリングの範囲から除去される。上式の集合 A_1 から A_4 の発生確率は独立性の仮定より次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} P(A_1) &= (1 - P_1) & P(A_2) &= P_2 \cdot (1 - P_2) \\ P(A_3) &= P_1 \cdot P_2 \cdot (1 - P_1) & P(A_4) &= P_1 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot (1 - P_2) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

上式の確率に N_e を乗じると、集合 A_k に対するサンプリング数 N_k が求められる。

以上の理論により、破壊確率 P_f が算定するには、まず式(5)の A_k から N_k 回のサンプリングを行ない、その結果、破壊の事象 ($S > R$) が発生した回数を n_k とすると

$$P_f \approx \sum_{k=1}^5 n_k / N_e = n_f / N_e \quad (7)$$

となり破壊確率が算定できる。以上のような層別サンプリングの有効性を示すために、次節で数値計算を示す。

3. 数値計算

数値計算に使用した構造モデルは、図-2のような $m=3$ の3部材より不静定ケーブル構造とし、ケーブルの抵抗値 $R_i, i=1, 2, 3$ は互いに独立な対数分布に従う確率変数とし、荷重 S は R_i とは独立な、ガウス漸近分布に従う確率変数とした。

解析プログラムのフローチャートを図-3に示し、その計算結果を表-1に示す。なおこの計算例は後述の論文と同一のものである。

表-1

Case	部材数	N	N_e/N	P_{01}	P_{02}	P_{03}	P_{04}
1	3	1000	33.8	0.98939	2.69×10^{-1}	1.12×10^{-1}	6.80×10^{-1}
		2000		0.98943	2.71×10^{-1}	1.18×10^{-1}	6.68×10^{-1}
		3000		0.98927	2.77×10^{-1}	1.11×10^{-1}	6.85×10^{-1}
		数値積分		0.98924	3.37×10^{-1}	1.37×10^{-1}	8.16×10^{-1}
2	6	1000	546.5	0.999533	1.17×10^{-1}	4.94×10^{-1}	3.00×10^{-1}
		2000		0.999542	1.20×10^{-1}	4.76×10^{-1}	2.90×10^{-1}
		3000		0.999531	1.18×10^{-1}	4.70×10^{-1}	3.04×10^{-1}
		数値積分		0.999522	1.30×10^{-1}	5.29×10^{-1}	3.14×10^{-1}

この表において、 P_{0k} は、荷重 S が作用したとき(3-6)個の部材が降伏する確率である。

4. 結言

計算結果により次の結論を得た。

- (1) 層別サンプリングによる算定値は、数値積分により求めた結果と非常に近い値が得られ、精度がよい。
- (2) 層別サンプリングによれば、 N_e/N は546となり試行回数は大幅に減少する。さらに一般モンテカルロ法との精度の比較は、当日スライドで紹介する。

参考文献

- (1) SHINOZUKA "On the Reliability of Redundant Structure", Annals of Reliability and Maintainability, Vol.5, 1966 p.p.605 ~ 610
- (2) 中野宮, 沢田 "分割サンプリングによる構造物の破壊確率の算定" 1974年 中回学術講演会講演要
- (3) Yao "Formulation of Structural Reliability" ASCE 1969 PP.2611 ~ 2619

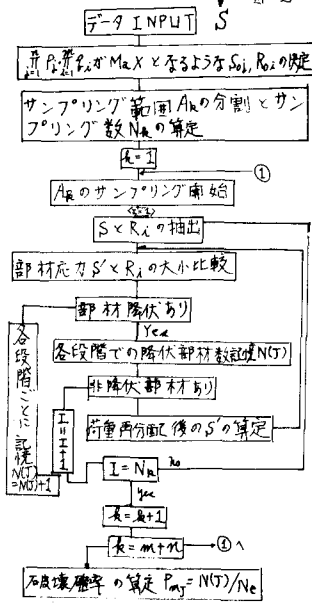
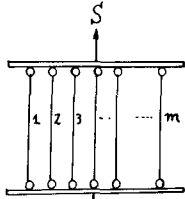


図-3