

[1] まえがき 地震、風、波などの不規則変動荷重を受ける構造物の信頼度評価方法の1つに、first-passage probability (一種の破壊確率) を計算する方法がある。この種の確率統計的手法を用いることによって、少なくとも慣用の安全率の考え方に基づくよりも、より合理的な構造安全評価が期待できると考えられ、従来より多くの研究成果が報告されてきた。ただ非定常問題等に関する理論が厳密には確立されていないため、材料の組織敏感性に帰因する強度のばらつきを考慮した研究が筆者の知る限りでは見受けられない。したがって本報では、まず応答が定常正規確率過程を示す場合の Rice の理論を拡張して、材料強度が確率量で与えられたときの期待横断率 (expected crossing rate per unit time) を求める式を誘導し、具体的に数値計算を行なって、強度が決定量で与えられる場合の結果と比較した。また応答が強度を越える現象を Poisson 過程と仮定して、first-passage probability を計算し、同様の比較検討を行なった。さらに種々の原因により、全面的に確率論的構造設計法を採用しきれない現状を考慮して、強度を決定量として扱うための1つの考え方を提示した。

[2] 期待横断率の算定式 本報では応答を $\mathbf{x}(t)$ 、材料強度を Q で表わし、両者は正負領域で対称であるとして正の領域における横断率を誘導した。また $\mathbf{x}(t)$ は平均値が0の狭帯域定常正規確率過程であると仮定した。(太文字は変数が確率変数であることを示す。)

1) 強度を決定量とした場合の期待横断率 μ_0^+ については, Crandall が Rice の理論にしたがって、次式のようにまとめている。

$$\mu_0^+ = f_0 \exp\left(-\frac{Q^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad (1)$$

式中 σ_x は $\mathbf{x}(t)$ の r.m.s. 値, f_0 は狭帯域過程における期待振動数である。

2) 強度を確率密度関数(以下 p.d.f. と略記する。)が正規分布関数で与えられる確率量とした場合 p.d.f. は周知の通り, $f(a) = 1/(\sqrt{2\pi}\sigma_a) \cdot \exp\{-(a-\bar{a})^2/2\sigma_a^2\}$ ($\bar{a}$ は平均値, σ_a^2 は分散) で表わされる。したがって強度が a と $a+da$ との間にある確率は、次式で示される。

$$P(a \leq Q \leq a+da) = 1/(\sqrt{2\pi}\sigma_a) \cdot \exp\{-(a-\bar{a})^2/2\sigma_a^2\} da \quad (a)$$

一方時刻 t で $\mathbf{x}(t)$ が a より小さく、時刻 $t+dt$ で Q 以上になる確率は Rice によれば次式の通りである。

$$P(\mathbf{x}(t+dt) \geq Q | \mathbf{x}(t) < a) = f_0/\sigma_x \cdot \exp(-a^2/2\sigma_x^2) dt \quad (b)$$

$\mathbf{x}$ と Q が独立な確率変数であることより、強度が a と $a+da$ との間にあり、 $\mathbf{x}(t)$ が時刻 $t+dt$ に a を超過する同時起確率は、式(a)と(b)を用いて次のように表わせる。

$$P(a \leq Q \leq a+da \cap \mathbf{x}(t+dt) \geq Q | \mathbf{x}(t) < a) = f_0/(\sqrt{2\pi}\sigma_a\sigma_x) \exp\{-(a-\bar{a})^2/2\sigma_a^2 - a^2/2\sigma_x^2\} da dt \quad (c)$$

式(c)を a について0から ∞ まで積分し、この場合の期待横断率 μ^+ を得ることがができる。(本来なら積分区間を $-\infty$ から ∞ までとすべきであるが、 Q が0以下になる確率が非常に小さい場合は問題にならない。)

$$\mu^+ = \frac{f_0}{\sqrt{1+m^2}\sigma_a} \left\{ 1 - G\left(\frac{1}{\sigma_a\sqrt{1+m^2}\sigma_a^2}\right) \right\} \exp\left\{-\frac{m^2}{2(1+m^2)\sigma_a^2}\right\} \quad (2)$$

式中 $m = \bar{a}/\sigma_x$ (強度の平均値と応答の r.m.s. 値との比), $\delta_a = \sigma_a/\bar{a}$ (強度の変動係数), $G(\cdot)$ は誤差関数で、 $G(z) = 1/\sqrt{2\pi} \int_z^\infty \exp(-t^2/2) dt$ である。

3) 強度を p.d.f. が条件付正規分布関数で与えられる確率量とした場合 強度の最小値あるいは最大値が何らかの理由(例えば、亀田、小池が非破壊効果と呼ぶ強度保証の考え方に基づけば最小値が与えられる。)で規定

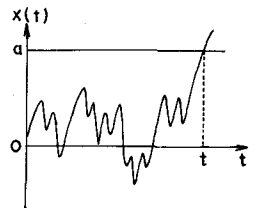


図1 応答が時刻 t に強度 Q を超過する現象の概略図

される場合には、強度の p.d.f. として条件付密度関数を用いる必要がある。
最小値を $\alpha_1 = \bar{\alpha} - \xi_1 \sigma_\alpha$ ($\xi_1 > 0$)、最大値を $\alpha_2 = \bar{\alpha} + \xi_2 \sigma_\alpha$ ($\xi_2 > 0$) と
すれば、 α の p.d.f. は次式で表わされる。

$f(\alpha) = 1 / \{ \sqrt{2\pi} \sigma_\alpha [G(-\xi_1) - G(-\xi_2)] \} \cdot \exp \left\{ -(\alpha - \bar{\alpha})^2 / 2\sigma_\alpha^2 \right\}$ ($\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$)
したがって式(1)の右辺を $G(-\xi_1) - G(-\xi_2)$ で除して、 α について α_1 から α_2 まで積分し、期待横断率 λ_0^+ の式を得ることができる。

$$\lambda_0^+ = \frac{f_0}{\sqrt{1+m^2\delta\alpha^2}} \frac{G(\beta_1) - G(\beta_2)}{G(-\xi_1) - G(-\xi_2)} \exp \left\{ -\frac{m^2}{2(1+m^2\delta\alpha^2)} \right\} \quad (3)$$

式中 $\beta_1 = \frac{m^2\delta\alpha - \xi_1(1+m^2\delta\alpha^2)}{\sqrt{1+m^2\delta\alpha^2}}, \quad \beta_2 = \frac{m^2\delta\alpha + \xi_2(1+m^2\delta\alpha^2)}{\sqrt{1+m^2\delta\alpha^2}}$

[3] 数値計算結果および考察 決定論的な考え方からすれば一種の安全率といえる指標 m と、材料強度のばらつきの大きさを示す指標 $\delta\alpha$ を適当に組合せ、式(1), (2), (3)に基づいて計算した期待横断率 (それぞれ λ_0^+ , λ_1^+ , λ_2^+) を図2に示す。さらに応答が強度を越える現象を Poisson 過程と仮定して first-passage probability ($P_f(t) = 1 - \exp(-\lambda_0^+ t)$) を計算した結果が図3と図4である。図2と図3より、強度 α の特性値として平均値 $\bar{\alpha}$ を用いた場合の信頼度評価の誤差は、 m が増加すると共に著しく増大することがわかる。すなわち安全度を高めるために m を大きくする程、強度の変動性に留意する必要があると考える。図4は $\delta\alpha$ に対する $P_f(10)$ の変化を示したものであるが、 m の値が小さい場合はとりか、5 あるいは6と大きくなると $\delta\alpha$ の変動に非常に敏感になるといえる。

次に強度が正規分布関数で表わされる分布を示す場合、安全工学的な観点に基づく特性値を考えてみる。いま特性値が $\alpha_c = \bar{\alpha} - \alpha \sigma_\alpha$ で表わせるとして式(1)によって計算した λ_0^+ と、 α を確率量 α の代わって式(2)にしたがって求めた λ_0^+ を等価と置くことによって $\alpha = (m - \sqrt{2\pi} \ln \lambda_0^+) / m \delta\alpha$ が得られる。図5に結果を示す。図中の破線は特性値が平均値の何パーセントであるのかを示すものである。例えば $m=6$, $\delta\alpha=0.20$ の場合、特性値は平均値より標準偏差の約1.7倍低い値であるといえるし、平均値の約65%の値であるという表現も可能である。このようなダイアグラムの作成は現状の構造設計法に多少とも確率論的要素を導入しようとする思想につながるものであると考える。

[4] あとがき 不規則振動問題における first-passage probability の値が材料強度のばらつきに強く影響され、その傾向は安全性を高めようと強度の平均値と応答の r.m.s. 値の比を大きくする程著しいことを示した。適確な構造信頼度の評価を行なうためにはこの問題を避けることはできないと考えている。

<参考文献> 1) S.H. Crandall & W.D. Mark: Random Vibration in Mechanical Systems, Academic Press, 1963 2) S.O. Rice: Mathematical Analysis of Random Noise, in Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, N. Wax, Ed. Dover Publications, 1954 3) 小池, 豊田: 荷電膜厚による強度劣化に伴う構造物の信頼性理論, 土木学会論文報告集, 第228号, 1974

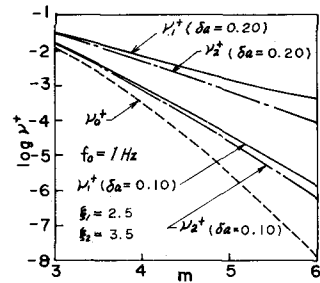


図2 強度を決定量とした場合と確率量とした場合の期待横断率の比較

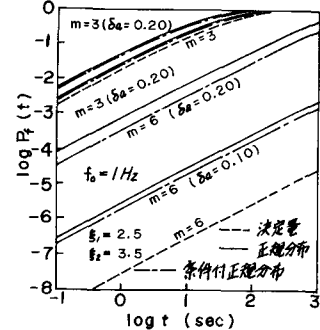


図3 強度を決定量とした場合と確率量とした場合の first-passage probability の比較

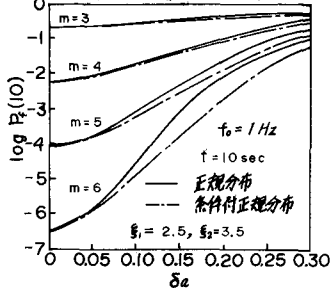


図4 強度のばらつきの大きさと first-passage probability との関係

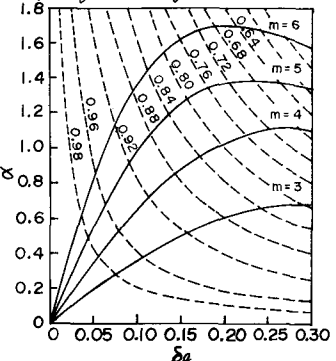


図5 強度の特性値を求めるダイアグラム