

徳島大学工学部 正会員 児嶋弘行
平尾 潔
香 川 県 庁 〇 龜山正則

1. 要旨; 本研究は立体トラス構造の終局耐力を検討するため、有限変位を考慮した場合のトラス部材に対する変形法の接線剛性マトリクス(Tangent Stiffness Matrix)および割線剛性マトリクス(Secant Stiffness Matrix)を誘導し、これらを用いて任意の比例増節点荷重をうける立体トラスの内力追跡法による弾塑性解析法について研究し、その崩壊過程を電子計算機で自動的に追跡できるような解析プログラムの作成を試みたものである。

2. 解析上の仮定; 本文の解析では次のような仮定を設ける。1) 材料は完全弾塑性体で理想化した応力歪曲線をもつものとし、歪硬化は考えない。2) 各部材断面は一変とし、部材力による断面の変形は無視する。3) 材料の応力-歪特性は時間と独立である。4) 荷重は全(比例)増節点荷重とし、その載荷位置は節点のみとする。5) 部材の極限強度は、軸力値が正の場合には全塑性軸力を用い、負の場合には全塑性軸力とオイラー荷重のうち、その絶対値が小さい方を用いる。

3. 解析に用いる基本式; 部材力およびそれに対応する釣合方程式は次のようなものである。

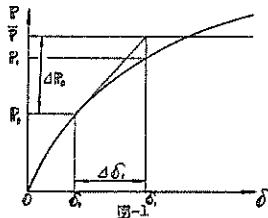
$$S_{ij} = A_{ij} E (L_{ij} - L_{ij0}) / L_{ij0} \quad \text{---(1)}, \quad \bar{P}_i = -\sum_j S_{ij}, \quad S_{ij} = \{L_{ij}, M_{ij}, N_{ij}\}^T S_{ij} \quad \text{---(2)}$$

ここで、 S_{ij} は部材 $i-j$ の軸力、 A_{ij} は断面積、 E は弾性係数、 L_{ij0} は変形前の部材長、 L_{ij} は変形後の部材長を表わす。また、 $\bar{P}_i = \{\bar{P}_{ix}, \bar{P}_{iy}, \bar{P}_{iz}\}^T$ は節点 i に作用する外荷重を表わし、 j は節点 i に集まる部材数であり、 L_{ij} , M_{ij} , N_{ij} はそれぞれ変形後の部材軸の基本座標軸 x , y , z に対する方向余弦である。式(1)は節点変位 δ_i と非線形な関係にあるため、式(2)を全節点について立てた構造全体の釣合方程式も非線形となり、 δ を一度の計算で求めることはできない。したがって式(2)を線形近似した剛性マトリクスをくり返し用い、節点変位 δ の収束解を求めなければならない。この線形近似した剛性マトリクスには、Tangent Stiffness Matrix と Secant Stiffness Matrix とがあり、前者は、式(2)を節点変位量 δ で偏微分したものであり、具体的には、 $S_{ij} = \{S_{xij}, S_{yij}, S_{zij}\}^T$, $\delta_i = \{\delta_{xi}, \delta_{yi}, \delta_{zi}\}^T$, $\delta_j = \{\delta_{xj}, \delta_{yj}, \delta_{zj}\}^T$ とすれば、

$$[K]_{ij} = \begin{bmatrix} \partial S_{xij} / \partial \delta_{xi} & \partial S_{xij} / \partial \delta_{yi} & \partial S_{xij} / \partial \delta_{zi} & \partial S_{xij} / \partial \delta_{xj} & \partial S_{xij} / \partial \delta_{yj} & \partial S_{xij} / \partial \delta_{zj} \\ \partial S_{yij} / \partial \delta_{xi} & \partial S_{yij} / \partial \delta_{yi} & \partial S_{yij} / \partial \delta_{zi} & \partial S_{yij} / \partial \delta_{xj} & \partial S_{yij} / \partial \delta_{yj} & \partial S_{yij} / \partial \delta_{zj} \\ \partial S_{zij} / \partial \delta_{xi} & \partial S_{zij} / \partial \delta_{yi} & \partial S_{zij} / \partial \delta_{zi} & \partial S_{zij} / \partial \delta_{xj} & \partial S_{zij} / \partial \delta_{yj} & \partial S_{zij} / \partial \delta_{zj} \end{bmatrix} \quad \text{---(3)}$$

と表わされる。後者は従来から用いられている剛性マトリクスの方向余弦をくり返しの各段階においてそのつど修正してゆくものであり、正確には Modified Secant Stiffness Matrix といわれる。

4. 収束解の求め方; 上に示したような線形近似した剛性マトリクスを用いて節点変位量 δ を求めるには、増分形式で求めなければならない。たとえは、Tangent Stiffness Matrix を用いた場合について(説明すれば、以下のようになる(図-1参照))。1) δ_0 を仮定し、これを式(1)に代入すれば軸力が求まり、さらに式(2)の右辺に代入すれば、この軸力と釣り合う外荷重 P_0 が求まる。2) 実架の荷重 $\bar{P}$ と P_0 の差 $\Delta P_0 = \bar{P} - P_0$ を求める。3) もし ΔP_0 の絶対値が許容誤差をより大であれば、式(3)を用いて $\delta = \delta_0$ における Tangent Stiffness Matrix を計算し、釣合方程式 $\Delta P_0 = [K] \cdot \Delta \delta$ を立て、 $\Delta \delta$ について解く。4) $\Delta \delta$ が求まったとき、 $\delta = \delta_0 + \Delta \delta$ を式(1)に代入し部材力を求め、さらに式(2)からこの時点で釣り合うべき外荷重 P_1 を求める。5) $\Delta P_1 = \bar{P} - P_1$ を求め、これが許容誤差より大ならば、以上のことを ΔP_n がより小になるまでくり返し行なう。このときの δ および δ を式(2)の非線形解とする。以上が Tangent Stiffness Matrix を



用いた収束解の求め方であるが、Secant Stiffness Matrixを用いた場合もこれに準じて行なう。

5. 解析手順；1)初期荷重に対して前述4の方法で収束解を求め、この部材力から荷重倍率(load factor)を計算し、その最小値 $\bar{R}_{min}$ を見出す。2) $\bar{R}_{min}$ がある許容誤差内に入らなければ、この $\bar{R}_{min}$ を用いて適当に荷重強度の増加を行ない、再び4の方法で収束解を求める。これと $\bar{R}_{min}$ が許容誤差内に入らなければくり返し行なう。3) $\bar{R}_{min}$ が許容誤差内に入れば、この値をもつ部材、あるいはこの値と非常に近い値をもつ部材は降伏したものと見なす。これ以後これらの部材力を一定値とし、剛性をもたないものとする。4)荷重を α 倍して次のこととくり返し、構造系が崩壊するまで行なう。なお、本研究における解析プログラムのフローチャートを添付し、図2のようにある。

6. 荷重強度の増加方法；機構化の第 n 段階目の部材力を $S_{n,0}$ 、その段階での m 回目の繰り返しにおける部材力を $S_{n,m}$ とすれば、荷重倍率は次のようになる。

$$\bar{R} = (S_p - S_{n,0}) / (S_{n,m} - S_{n,0}) \quad (4)$$

ただし、 S_p は全塑性軸力(またはオイラー値)であり、 $S_{n,0} = 0$ とする。この $\bar{R}$ を全くの部材について求め、その最小値 $\bar{R}_{min}$ を求める。 n 段階目の荷重強度を $R_{n,0}$ 、同段階の m 回目の強度を $R_{n,m}$ とすれば次の荷重強度 $R_{n,m+1}$ は、 $\bar{R}_{min}$ を用いて、

$$R_{n,m+1} = \bar{R}_{min} (R_{n,m} - R_{n,0}) + R_{n,0} \quad (5)$$

のようになる。そして、 $\bar{R}_{min} \geq 1$ となつた時点の段階に入る。

7. 構造系の崩壊判定；構造系の崩壊判定は次の式による。

$$3N - (M + R) > 0, \quad R_c \leq 2 \quad (6)$$

ここで N は全節点数、 M は弾性部材数、 R は未知反力数であり、 R_c は節点に集まる部材数である。上に示す式のうしろ、いずれか一方が満たせば構造系は崩壊したものとみなす。ただし、 $R_c \leq 2$ は、3方向(x, y, z 方向)が全く拘束され(1)る節点についてはこれを除く。

8. 計算例；図3のようなドーム構造物に対する計算結果を線形解との比較も含め講演会当日スライドなどで紹介する予定である。

9. 結言；ドーム構造物と、長大スパンを有するトラス構造物は、線形解と有限変位を考慮した場合の厳密解とは大きな差が生じ、これらの構造物と線形解を併用することは不適当であると思われる。また同じ非線形解析でも、Tangent Stiffness Matrixを用いた場合と、Secant Stiffness Matrixを用いた場合では、前者の方が各荷重段階の収束解を得るためのくり返し回数が少なくて済むことがわかった。また、一般には初期変位は δ_0 として計算して良いが、ケール構造のように容易に変形しやすい場合は、 δ_0 に相当な値を与えておく必要がある。

参考文献；1) Frank Baron, Mahadeva S. Venkatesan: NONLINEAR ANALYSIS OF CABLE AND TRUSS STRUCTURES, Journal of the STRUCTURAL DIVISION, ASCE, 1971/4 2A 2) Semih S. Tezcan, Prem Krishna: NUMERICAL SOLUTION OF NONLINEAR STRUCTURES, Journal of the STRUCTURAL DIVISION, ASCE, 1968/4 6H.

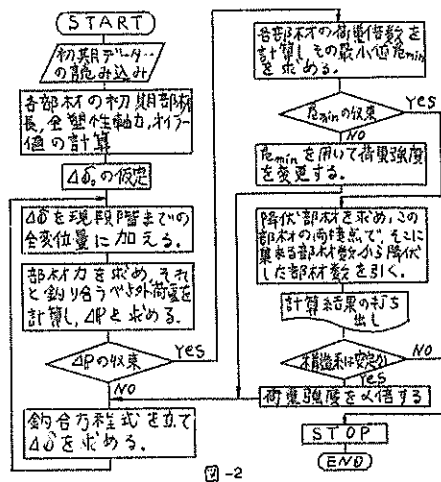


図-2

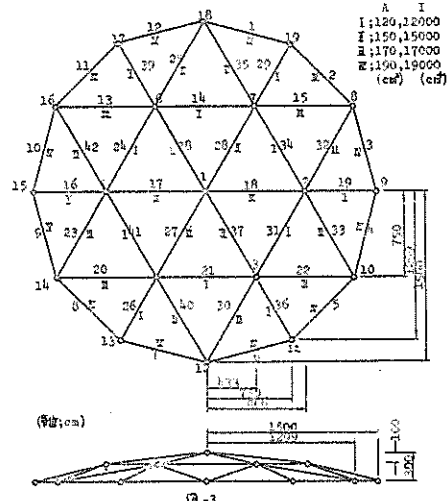


図-3