

I-2 棒構造内の2次元粘弾性波動伝播について

広島大学工学部 正員 佐藤 誠

1. はじめに

粘弾性体内の波動伝播特性の1つは、入射パルス波面通過後の領域において、緩和現象により伝播速度が時間とともに変化するところにある。したがって粘弾性体の波動伝播解析を行なう場合に、準静的な実験から得られた弾性係数を用いて逐次積分を行なうと安定性の条件を満たさないことがある。こゝではそれらについて検討するために correspondence principle¹⁾を用いていくつかの線型粘弾性モデルの縦波伝播速度および弾性係数の時間変化を示し、これらに対して棒構造内の粘弾性波伝播解析を行なう。

2. 粘弾性体の応力-ひずみ関係

線型粘弾性体の応力-ひずみ関係は線型微分演算子 P, Q, P', Q' を用いると次式で表わされる。

$$P e_{ij} = Q \sigma_{ij}, \quad (1) \quad P' \sigma_{ij} = Q' e_{ij}. \quad (2)$$

しかし以下では、よく用いられるように体積弾性係数 K が弾性体の場合と同じであると仮定して $Q'/P' = 3K$ とする。(1), (2) より次式が得られる。

$$\sigma_{ij} = \frac{Q}{P} e_{ij} + (K - \frac{Q}{3P}) \delta_{ij} e_{kk}. \quad (3)$$

弾性体の場合には $Q/P = 2\mu$ である。ただし μ はせん断弾性係数である。

correspondence principle と用いると Fig. 1 に示す4種類のモデルの μ_0 は次式となる。なお $\lambda_0 = K - \frac{2}{3}\mu_0$ 。

$$(1) \text{ Maxwell model; } \mu_0 = \mu_u T_{10} / (1 + T_{10}), \quad (4)$$

$$(2) \text{ Voigt model; } \mu_0 = \mu_r (1 + T_{20}), \quad (5)$$

$$(3) \text{ 3 parameter model (I); } \mu_0 = \mu_u (m + T_{10}) / (1 + T_{10}), \quad (6)$$

$$(4) \text{ 3 parameter model (II); } \mu_0 = m \mu_u (1 + T_{20}) / (1 + m T_{20}). \quad (7)$$

こゝに $m \mu_u = \mu_r$ であり、 μ_u は非緩和の μ 、 μ_r は緩和後の μ 、 T_1 は緩和時間、 T_2 は遅延時間である。また σ はラプラス変換ベラノータである。

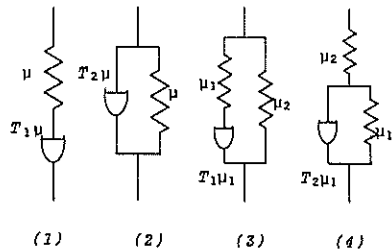


Fig. 1

3. 粘弾性体の波動方程式

物体力と無視した運動方程式は次式である。

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j}. \quad (8)$$

(3), (6) および変位とひずみの関係から (8) は次式となる。

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{Q}{2P} u_{i,jj} + \frac{1}{3} (3K + \frac{1}{2} \frac{Q}{P}) u_{j,ji}. \quad (9)$$

(9) から体積変化および回転に対する波動方程式は

$$\rho \ddot{e}_{ii} = \frac{1}{3} (3K + \frac{2Q}{P}) \nabla^2 e_{ii}, \quad (10) \quad \rho \ddot{\omega}_i = \frac{Q}{2P} \nabla^2 \omega_i. \quad (11)$$

となり、correspondence principle を適用すると緩和後と非緩和との縦波の伝播速度の比 $\theta = C_r/C_u$ はそれぞれモデルに対して次式となる。

$$(1) \text{ Maxwell model; } \theta^2 = \frac{3K + 4\mu_u \exp(-t/T_1)}{3K + 4\mu_u}, \quad (12)$$

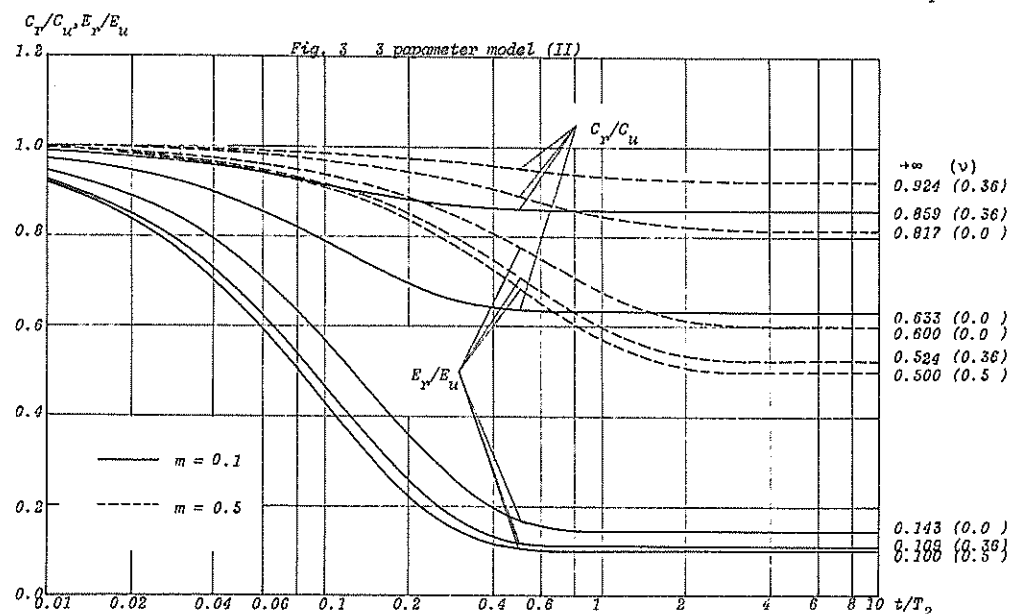
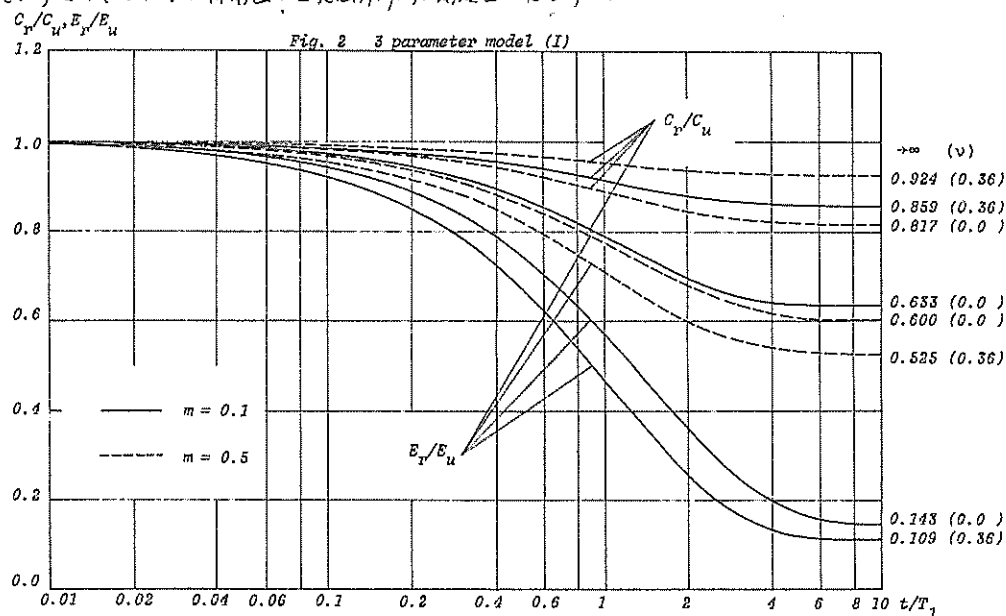
$$(2) \text{ Voigt model; } \theta^2 = \frac{3K + 4\mu_r (1 + T_2/t)}{3K + 4\mu_r}, \quad (13)$$

$$(3) \text{ 3 parameter model (I); } \theta^2 = \frac{3K + 4\mu_u \{(1-m) \exp(-t/T_1) + m\}}{3K + 4\mu_u}, \quad (14)$$

$$(4) \text{ 3 parameter model (II); } \theta^2 = \frac{3K + 4\mu_u \{(1-m) \exp(-t/mT_2) + m\}}{3K + 4\mu_u}. \quad (15)$$

4. 考察

Fig. 2, 3 にはそれぞれ (14), (15) から求めた C_r/C_u と (6), (7) から同様にして求めた E_r/E_u を $m=0.1, 0.5$ に対して図示の非緩和のポアソン比 ν_u について示した。これより粘弾性体では継波の伝播速度から求めた動弾性係数が静的な値の数倍以上になることが説明され、また一軸引張りのクリープ曲線から粘弾性モデル定数を求めることができる。 C_r/C_u からは逐次積分を行なうときの安定性を保持するために、空間分割長さと時間分割長さとの比が与えられる。なお棒構造の二次元解析例は講演当日発表する。



- 1) E. L. Webber, J. P. H., "Stress Analysis in Viscoelastic Bodies using Finite Elements and a Correspondence Rule with Elasticity", *Journal of Strain Analysis*, Vol. 4, No. 3, pp. 236-243, 1969