2—10　　一様地下水流中における揚水試験に関する一考察

広島大学工学部　正員　工博　金丸　昭治
呉工業高等専門学校　〃　　　星　健三
広島大学工学部　〃　工修　三島　隆明
広島大学大学院　学生員　○久吉　哲太郎

近年，水需要の増大にともなって，地下水の揚水も例えば河川の近傍などのように特殊な境界条件を有する場所で行なわれるようになったことは周知のとおりである。ところが，このような場所における揚水試験においても，一般に Thiem の平衡式を用いた透水係数の算定あるいは揚水許容量の推定が広くおこなわれているが，水資源を有効に利用する面からも，また資源維持の観点からも，さらに間接的な災害を防止する意味からも，これらの境界条件の影響度を検討しておくことが必要であろう。そこで，この研究においては，図・1 (a),(b) に示すような準一様流のある状態における定常揚水試験において考慮すべき事項について検討した結果について述べる。図・1 (a),(b) に示すような境界状態における地下水流動の基礎方程式としては，現象場が均質等方性であり，流動は非圧縮性流体の二次元流動とし，しかも Darcy 則にしたがうものとすれば，連続方程式および運動方程式は，それぞれ(1)式，(2)式のようになる。

$$\frac{\partial(uh)}{\partial x}+\frac{\partial(vh)}{\partial y}=0 \;---(1),\quad u=-k\frac{\partial h}{\partial x},\; v=-k\frac{\partial h}{\partial y}\;---(2)$$

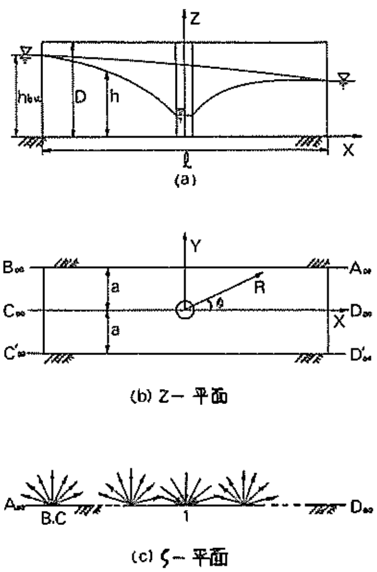
ただし，u, v は x, y 方向の速度成分であり，k は透水係数である。そこで，(2)式を(1)式に代入して整理すると，結局(3)式のような Laplace の方程式となり，また $\phi=h^2$ なる速度ポテンシャルを考えて，(1),(2)式を用いて整理すると，(4)式のようになる。

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2}=0\;---(3),\quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=0\;---(4)$$

したがって，(3)式の解は複素ポテンシャルについて得られる関係式を用いて求めることができる。そこで，まず，一様流の方向を x 軸に取って一様地下水流について考えると，複素ポテンシャル w は(5)式のようになり，　$w=Uz=Ux\;---(5)$

速度ポテンシャル $\phi=Ux$ となるから，一様流の単位幅当りの流量を q とすれば，h^2 は(6)式のように表わされる。

$h^2=-2qx/k+C_1\;---(6)$，ただし C_1 は任意定数である。（以下 $C_i\,(i=1,2,3\cdots)$ はそれぞれ任意定数を表わす）



図・1

つぎに，一様流のない状態における揚水について考えてみると，図・1 (a),(b)において両側の水際線に対して鏡像を繰り返した後，$\zeta=e^{\pi z/a}$ によって(c)図のような ζ－平面に等角写像すれば複素ポテンシャル w は(7)式のように表わされる。

$$w=-\frac{1}{2}m\ln\zeta+m\ln(\zeta-1)-m\{\ln(\zeta-e^{\pi l/a})+\ln(\zeta+e^{-\pi l/a})\}+m\{\ln(\zeta-e^{2\pi l/a})+\ln(\zeta+e^{-2\pi l/a})\}$$
$$-m\{\ln(\zeta-e^{3\pi l/a})+\ln(\zeta+e^{-3\pi l/a})\}+\cdots\cdots\;---(7)$$

ただし m は湧出点および吸入点の強さ，a, ℓ は図・1 に示す長さである。さらに(7)式を整理すると，

$$w = m \ln \sinh\left(\frac{\pi z}{2a}\right) - m\left\{\ln \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{\frac{\pi(z-n\ell)}{a}}\right)\left(1+e^{\frac{\pi(z+n\ell)}{a}}\right)\right\}\Big] + 2m\left[\ln \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{\frac{\pi(z-2n\ell)}{a}}\right)\left(1+e^{\frac{\pi(z+2n\ell)}{a}}\right)\right\}\Big] + C_2 \quad \text{---(8)}$$

のようになり，$m=\frac{Q}{\pi k}$ とおき，さらに速度ポテンシャルを求めて h^2 との関係式を求めると(9)式のようになる。

$$h^2 = \frac{Q}{\pi k}\Big[\mathrm{Re}\left\{\ln \sinh\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\right\} - \mathrm{Re}\Big[\ln\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{\frac{\pi(z-n\ell)}{a}}\right)\left(1+e^{\frac{\pi(z+n\ell)}{a}}\right)\right\} + 2\ln\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{\frac{\pi(z-2n\ell)}{a}}\right)\left(1+e^{\frac{\pi(z+2n\ell)}{a}}\right)\right\} + C_3 \quad \text{---(9)}$$

そこで(6)式および(9)式より一様流の中の揚水に関する流動式を求めると(10)式のように与えられる。

$$h^2 = -\frac{2q}{k}x + \frac{Q}{\pi k}\Big[\mathrm{Re}\left\{\ln \sinh\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\right\} - \mathrm{Re}\Big[\ln\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{\frac{\pi(z-n\ell)}{a}}\right)\left(1+e^{\frac{\pi(z+n\ell)}{a}}\right)\right\} + 2\ln\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{\frac{\pi(z-2n\ell)}{a}}\right)\left(1+e^{\frac{\pi(z+2n\ell)}{a}}\right)\right\}\Big]\Big] + C_4 \quad \text{---(10)}$$

以上のように，図・1 (a),(b)に示すような境界に対する流動の近似式が得られたのであるが，(10)式の大カッコの中の才2項以下は 極めて複雑な無限乗積となっており実際計算は容易に行なえない。そこで，図・1 (a)に示す x の正方向にある水際を無限遠にもっていった状態を考えると流動式は(11)式のようになる。

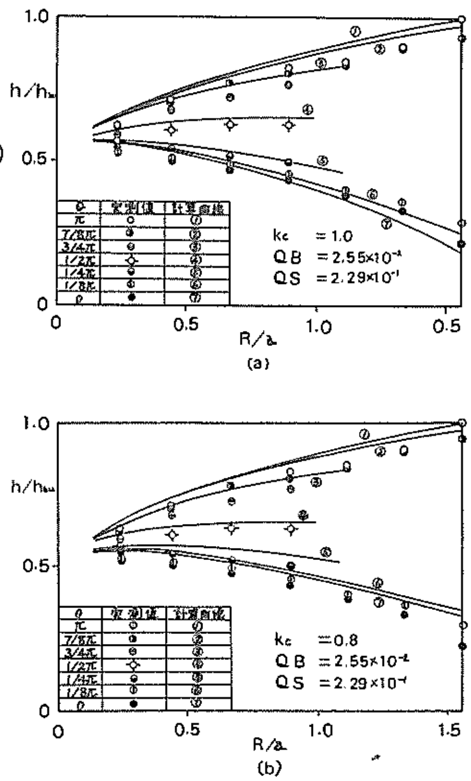
$$h^2 = -\frac{2q}{k} + \frac{Q}{\pi k}\left[\mathrm{Re}\left\{\ln \sinh\left(\frac{\pi z}{2a}\right) - \ln \sinh\left(\frac{\pi(z-\ell)}{2a}\right)\right\}\right] + C_5 \quad \text{---(11)}$$

さらに，x の負方向の水際も無限遠にもっていった状態を考えると(12)式のようになる。

$$h^2 = -\frac{2q}{k} + \frac{Q}{\pi k}\left[\mathrm{Re}\left\{\ln \sinh\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\right\}\right] + C_6 \quad \text{---(12)}$$

したがって，境界条件の影響度は，(10)式を精度のバランスを考えて有限乗積で表わした式，および(11)，(12)式について実験的，解析的に比較検討すればよい。

実験的な検討として，ℓ=1.40m，a=0.45m のプラスチック容器に $k=1.53\times10^{-3}$ m/sec の砂試料を層厚(D)=0.40m，揚水孔径 25mm の装置を用いて実験を継続中であるが，実験結果の一部と，(11)式および(12)式とを無次元パラメータを用いて比較したものをそれぞれ図・2 (a)，(b)に示す。図中 $h, h_{bu}, \ell, a, R, \theta$ は図・1 (a),(b) に示す値であり，$QB=Q/2\pi k h_{bu}^2$，$QS=2aq/k h_{bu}^2$，K_c は透水係数補正比である。図に示された実測値と計算との間に見られる傾向は QB，QS を数種組合せて行なった実験においても認められる。これらのことから一般に次の事項が指摘できる。すなわち，図・1 (a),(b) に示すような境界状態における揚水試験においては，ℓ/a の比が 1.5 程度の状態であれば，(11)式を用いて算定すればほぼ妥当な透水係数あるいは準一様流量が求められる。



図・2

また，算定に用いる水深としては，一様流の方向の水深を採用する方が良いようである。

現在，解析的，実験的検討を継続中であり，さらに詳しくは講演時に述べる予定である。