1 —10　　桁断面の最適設計法に関する研究

愛媛大学工学部　正員　○大久保禎二
愛媛大学大学院　　　畝田　隆司

1. まえがき

構造物の最適設計において考慮すべき設計変数には、断面の諸元，材質，構造形式および格点の座標、桁や桄の本数などきわめて多くの種類があるが、これらの設計変数は，数学的見地からは，連続型、離散型，整数型などに分類することができる。このような離散型あるいは整数型の変数をも含む最適問題を解く方法として，整数計画法（*Integer Programming*），枝払い法（*Branch and Bound Method*），動的計画法（*Dynamic Programming*）等が考えられるが，ここでは一般の非線型な最適設計問題にきわめて有効に適用できると考えられる，枝払い法の考え方とＳＬＰ法とを組み合わせた最適設計法およびこれをＩ型断面の最適設計に適用した例について述べるものである。なお，本研究では，Ｉ型断面の目的関数として製作費を考慮している。

2. 枝払い法（*Branch and Bound Methods*）

整数計画法が変数の整数性あるいは離散性を利用せずに、むしろそれを連続変数のままで処理しようとする方法であるのに対し、枝払い法は，変数の離散性を 100 %利用し能率的に整数型あるいは離散型の最適解を求めようとする方法である。いま、Ｎ個の変数：$X=(x_1, \cdots\cdots, x_N)$ を有する最小値（又は最大値）問題を考える。各整数変数の変域が有限であるとすれば、変数はその上下限の間の有限個の点の値しかとり得ない。したがって各変数の値のとり得る組み合わせは有限個となるので，これらの組み合わせ一つ一つについてその実行可能性と目的関数の値を逐次しらべていけばいつかは最適解を見つけることができるはずである。しかし実際の最適問題においては，これらの組み合わせすべてを実用的な時間内に調べることは一般に不可能である。そこで枝払い法では，これら全部の組み合わせを調べなくとも，「その一部を調べただけで残りの組み合わせは必らず調査ずみの組み合わせよりもその目的関数の値が大きい（又は小さい）か等しいということ，あるいはまた許容性，整数性をもたないということが証明されているならば，表向きには全組み合わせの調査でなくても，その実質においては全組み合わせを調べあげるのと同じ効果をもつことになる」という考えのもとに，まずある設計変数：x_1 に着目し，この x_1 のとり得る各整数値（離散値）について、その実行可能性および実行可能なものについては $x_2, \cdots\cdots, x_N$ の整数条件なしでの最適解を求める。この最適解のうちで目的関数が最小（又は最大）となる x_1 の整数値をとり，x_2 に進む。x_1 と同様にして最適な整数解を求める。このようにして x_3，x_4 と計算を進めていくことにより、きわめて能率的に整数解（離散解）を得ようとする方法である。（Fig - 1 参照）

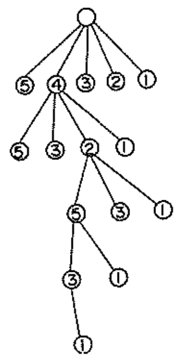

Fig. 1

3. 最適設計法の概要

2.で述べた枝払い法の考え方を実際の最適設計問題に適用する場合、いかにして能率よく各整数変数の最適値を見出すかということが問題となるが、本研究ではこの方法としてSLP法を用い、整数解を得た変数は定数と見なし変数群より消去することにより各整数変数を決定する毎にシンプレックス表の構成を修正し残りの変数の最適解を求めることとした。すなわち、まず設計変数群 $\mathbf{X} = (x_1, \cdots\cdots, x_N)$ を整数型（離散型）の設計変数群 $\mathbf{X}_1 = (x_i, x_{i+1}, \cdots\cdots, x_{i+m})$ と連続型の設計変数群 $\mathbf{X}_2 = (x_p, x_{p+1}, \cdots\cdots, x_{p+n})$ に分け、$\mathbf{X}_1$ の整数条件なしでSLP法により最適解：

$\mathbf{X}_1^0 = (x_i^0, \cdots\cdots, x_{i+m}^0)$, $\mathbf{X}_2^0 = (x_p^0, \cdots\cdots, x_{p+n})$

を求める。つぎに、$\mathbf{X}_1$ の中よりある設計変数（x_i）を選び、上で求めた最適解：x_i^0 が整数値あるいは実行可能な離散値であるかどうか調べる。もし、そうでなければ、上で求めた x_i^0 をはさむ2つの整数値あるいは離散値を定め、それぞれの値について $(x_{i+1}, \cdots, x_{i+m})$ の整数条件なしでSLP法により最適解を求め、目的関数の値が最小（又は最大）となる x_i を決定する。この場合 x_i は定数となるので、未知変数は $\mathbf{X}_2 = (x_p, x_{p+1}, \cdots\cdots, x_{p+n})$ および $\mathbf{X}_1$ においては $(x_{i+1}, \cdots\cdots, x_{i+m})$ となる。以下同様にして逐次 $\mathbf{X}_1$ の変数の整数値を決定してゆけば最終的に $\mathbf{X}_1$ は整数値（離散値）のみとなり、所定の最適解が得られることとなる。この最適設計法の概括的な流れ図を示すと図−2のごとくになる。

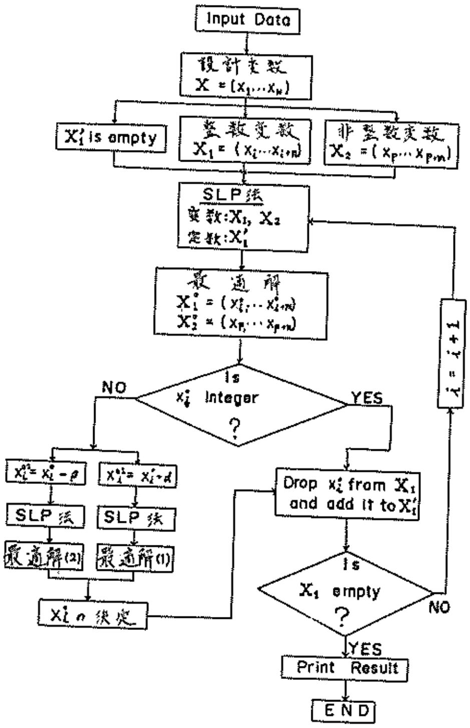

Fig. 2

4 I型断面の最適設計例

つぎに、3.で述べた最適設計法を、曲げモーメントを受けるI型断面（図−3参照）の最適設計に適用した例について述べることとする。

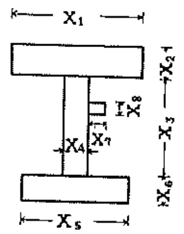

Fig. 3

(1) 設計変数　水平補剛材を1本有するI型断面の設計変数としては、上下フランジプレート、ウェブプレート、水平補剛材の板巾および板厚が考えられるが、この例では一応ウェブプレートの高さを一定とし、$x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ を設計変数とした。整数型変数としては各板厚（x_2, x_4, x_6, x_8）のみを考え、mm単位で整数値をとることができるものとした。また板巾については連続型変数とし、mm以下の数値をもとり得るものとした。

(2) 制約条件　設計は鋼道示および溶鋼道示に従うものとし、許容応力度、板厚、板巾、補剛材の必要剛度等すべての制約条件を考慮した。

(3) 目的関数　目的関数としては桁の製作費を考え、鋼道路橋原価計算表[3]（昭和46年度）を参

照してその算定式を決定した。すなわち製作費は鋼材費および製作加工費よりなるものとし、鋼材費としては使用する鋼板の費用のみを考え、ベース価格、エキストラ料、規格料、ノルマライズ料を考慮し各鋼板毎に単価を算定した。また製作加工費としては、溶接工程以外の加工費については ton 当りの単価を、また溶接工程については単位溶接量（mm^3）当りの単価を用い、工場内搬費も考慮してその費用を算定した。

(4) 計算例　種々の桁高および曲げモーメントの組み合わせについて計算を行なったが、その一例として、桁高：$X_3=1500\,mm$ の桁が $100^{t\cdot m}$ の曲げモーメントを受ける場合の計算結果を表－1に示す。ただし桁断面の長さを5mとし、1m毎に垂直補剛材が配置されているものとした。この計算例では、X_2, X_4, X_6, X_8 の整数条件を含まない最適解として表－1の左端の列に示す結果(X^0)が得られ、目的関数として169890.6円を得た。つぎに X_2, X_4, X_6, X_8 の整数解を得るための *Branch and Bound* の操作を行なうわけであるが、I型断面の最適設計の場合には、腹板厚：X_4 の値がフランジおよび水平，垂直補剛材の寸法の決定に大きな影響を与えるので、まず X_4 の整数解を決定することが必要となる。この例では X_4^0 は腹板の最小板厚の制約条件より 8.00 mm と整数解が得られているのでつぎに X_2 の整数解を求める。$X_2^0=11.17\,mm$ であることより X_2 に 11^{mm} および 12^{mm} の整数値を代入し、X_1, X_5, X_6, X_7, X_8 を設計変数として最適解を求めると、$X_2=11^{mm}$ に対して目的関数として 170488.5 円を得たのに対し、$X_2=12\,mm$ の場合は 169904.5 円と安くなっている。したがって X_2 の整数解として 12^{mm} と決定する。つぎに $X_2=12^{mm}$ の最適結果より $X_6^0=9.33^{mm}$ を得たので $X_6=9^{mm}$ および 10^{mm} の値を代入すると、$X_6=9^{mm}$ の場合はフランジの突出巾の制限より実行不可能となり、$X_6=10^{mm}$ の場合には目的関数として 169911.3 円を得た。この解において X_8 も 8 mm と整数であるのでこの解が最終的な最適解となり、わずか2回の *Branch and Bound* の操作で最適解を得ることができた。この最終解と X_2, X_4, X_6, X_8 の整数条件のない場合の最適解とを比較すると、断面の寸法においては7%程度変化しているものもあるのに対し、目的関数はわずかに 0.012% 増加しているにとどまっている。

表－1　I型断面の最適設計例

$X_3=1500^{mm}$，　$B.M=100^{tm\text{-}m}$　　（単位 ＝mm）

設計変数	整数条件なし (X^0)	BRANCH AND BOUND…X_2		BRANCH AND BOUND…X_6	
		$X_2=11.00$	$X_2=12.00$	($X_2=12.00$) $X_6=9.00$	($X_2=12.00$) $X_6=10.00$
X_1	276.04	272.00	257.40		257.18
X_2	11.17	11.00	12.00	実	12.00
X_4	8.00	8.00	8.00	行	8.00
X_5	288.12	86.98	287.96	不	269.12
X_6	9.34	32.50	9.33	可	10.00
X_7	64.61	64.61	64.61	能	64.61
X_8	8.00	8.00	8.00		8.00
目的関数(円)	169890.6	170488.5	169904.5		$\boxed{169911.3}$

ところで上記の計算例から明らかなように，I型断面の最適設計においては，板厚は常に整数条件なしで得られた最適解より大きくかつ最も近い整数値（又は離散値）をとり，これらの整数値を定数としてSLP法により x_1 および x_5 を求めればそれが最終的な最適解となることがわかる。また当然のことながら目的関数の値は整数条件を追加する毎に増加していくことも認められる。

5. 考察

以上、枝払い法およびSLP法により連続型および整数型（離散型）の変数を有する最適設計問題を解く方法およびこれをI型断面の最適設計に適用した例を述べ、この方法によりきわめて容易に最適解が得られることを示した。しかし、I型断面の最適設計でまずウエブプレートの板厚の整数解を決定したように，この方法により変数の整数値（離散値）を求める場合、最適問題の性質によっては，X_1 の変数群の中で *Branch and Bound* する変数の順序を決定することが重要となる場合もあり，その決定にあたっては十分注意する必要がある。この問題に対する一つの解決法としては，整数型の変数に整数の定数を与えるかわりにその整数値を境界とした変数の変域を制限する条件式を追加し，変数の数を変化させないで *Branch and Bound* を進める方法が考えられるが，この場合には最適解を得るまでに必要とする *Branch and Bound* のくり返し数がきわめて多くなることが予想される。

最後に本研究は，昭和46年度文部省科学研究費の補助を受けた研究の一部であり，計算には九州大学大型計算機センターの FACOM 230－60 を利用したものであることを付記して謝意を表する。

参考文献

1) Nicholson, T. A. J. : "Optimization in Industry" Vol. 1, Longman, 1971
2) 古瀬大六 "数理計画法 I" 共立出版，1971
3) 日本橋梁建設協会，鉄骨橋梁協会共編 "鋼道路橋原価計算表"（昭和46年度版）