

横河工事 正員 藤原 晋

山口大学 正員 会田忠義

本研究は図-1のような分岐点がある荷重、変形曲線をもつ構造物の弾性座屈を述べたものである。このような構造物では、荷重 P の増加にしたがって、 $\overrightarrow{OA}$ の曲線をたどり荷重 P が P_E になるとき変形は急に増大し、 $\overrightarrow{AC}$ の曲線をたどる。しかし、上記の変形を拘束すると、 $\overrightarrow{AB}$ の曲線をたどる。A点に相当する荷重 P_E が座屈荷重である。

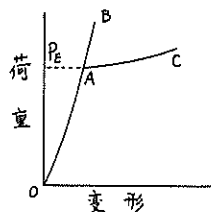


図-1

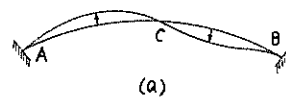
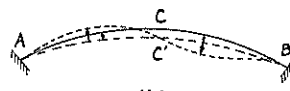


図-2



図の分岐点A以後では、 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ に沿った二つのつりあひ状態があり、前者は座屈荷重にいたるまでに存在した変形様式で、後者は前者とそれと異なった別の変形様式(座屈変形様式)である。

以上より明らかのように、座屈荷重が分岐点の荷重であることから、座屈直前まで生じた変形様式に微小の変形を付加して、新しく生ずる座屈変形様式を考え、この変形様式がつりあう荷重(大きさ)を見出すことにより、座屈荷重は求められる。

従来の弾性座屈理論は、座屈荷重 P_E による変形を考慮せず、すなわち、図-2(a)に示されたように構造物の元の形状に微小変位を付加して座屈変形様式を想定する微小変形位置における弾性座屈理論である。剛な構造物の解析には十分正確である。しかし、柔かい構造物では座屈荷重による座屈直前までの変形は比較的大きく、この変形による影響を考慮すべきであろう。本研究では、座屈荷重による変形を考慮した、すなわち、図-2(b)に示されたように変形した変形 $A'C'B$ に微小変位を付加して座屈変形様式を想定する有限変形位置における弾性座屈理論式を求め、座屈荷重による変形の影響を考察する。

解析に当って、次の仮定を入れた。①骨組については、骨組構造物一般の仮定が成立する。②内力はすべて弾性限内にあるとする。③局部座屈は生じない。

以下、トラス構造について、理論式と適用結果を示す。

微小変形位置における弾性座屈理論式

ある荷重 P^0 が作用した状態(先行荷重状態)に、作用状態 α 異なる荷重 P が作用し、 P が徐々に増加して P_E に達した限界状態を想定する。ここで、 P および P_E を次のベクトルで表す。

$$P^0 = \{ X_1^0, X_2^0, \dots, X_m^0, Y_1^0, Y_2^0, \dots, Y_m^0, Z_1^0, Z_2^0, \dots, Z_m^0 \} \quad (1)$$

$$P_E = \{ X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_m, Z_1, Z_2, \dots, Z_m \} \quad (2)$$

先行荷重状態における節点 \$i\$ のつりあい式は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^m N_{ij}^0(f, d^0) \lambda_{ij}(f) - X_i^0 &= 0 \\ \sum_{j=1}^m N_{ij}^0(f, d^0) \mu_{ij}(f) - Y_i^0 &= 0 \\ \sum_{j=1}^m N_{ij}^0(f, d^0) V_{ij}(f) - Z_i^0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (3)}$$

ここで、\$f\$ は構造物の節点座標、\$d^0\$ は先行荷重による構造物の節点変位、\$N_{ij}^0(f, d^0)\$ は先行荷重による部材応力、\$\lambda_{ij}\$、\$\mu_{ij}\$ および \$V_{ij}\$ は方向余弦である。

座屈直前の限界状態におけるつりあい式は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^m (N_{ij}^0(f, d^0) + N_{ij}(f, d_0)) \lambda_{ij}(f) - X_i^0 - X_i &= 0 \\ \sum_{j=1}^m (N_{ij}^0(f, d^0) + N_{ij}(f, d_0)) \mu_{ij}(f) - Y_i^0 - Y_i &= 0 \\ \sum_{j=1}^m (N_{ij}^0(f, d^0) + N_{ij}(f, d_0)) V_{ij}(f) - Z_i^0 - Z_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (4)}$$

ここで、\$d_0\$ は座屈荷重 \$P_E\$ が作用した状態における \$P_E\$ による構造物の節点変位、\$N_{ij}(f, d_0)\$ は \$P_E\$ による座屈直前の部材応力である。

座屈直前の変形様式に付加変位 \$\Delta d\$ を加えた座屈変形様式におけるつりあい式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^m (N_{ij}^0(f, d^0) + N_{ij}(f, d_0 + \Delta d)) \lambda_{ij}(f + \Delta d) - X_i^0 - X_i &= 0 \\ \sum_{j=1}^m (N_{ij}^0(f, d^0) + N_{ij}(f, d_0 + \Delta d)) \mu_{ij}(f + \Delta d) - Y_i^0 - Y_i &= 0 \\ \sum_{j=1}^m (N_{ij}^0(f, d^0) + N_{ij}(f, d_0 + \Delta d)) V_{ij}(f + \Delta d) - Z_i^0 - Z_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (5)}$$

ここで、先行荷重による部材応力は変形後も変わらないものとする。式(5)は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left[(N_{ij}^0(f, d^0) \frac{\partial \lambda_{ij}(f)}{\partial f_k} + (\frac{\partial N_{ij}(f, d_0)}{\partial d_k})_{d=d_0} \lambda_{ij}(f)) + N_{ij}(f, d_0) \frac{\partial \lambda_{ij}(f)}{\partial f_k} \right] \Delta d_k &= 0 \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left[(N_{ij}^0(f, d^0) \frac{\partial \mu_{ij}(f)}{\partial f_k} + (\frac{\partial N_{ij}(f, d_0)}{\partial d_k})_{d=d_0} \mu_{ij}(f)) + N_{ij}(f, d_0) \frac{\partial \mu_{ij}(f)}{\partial f_k} \right] \Delta d_k &= 0 \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left[(N_{ij}^0(f, d^0) \frac{\partial V_{ij}(f)}{\partial f_k} + (\frac{\partial N_{ij}(f, d_0)}{\partial d_k})_{d=d_0} V_{ij}(f)) + N_{ij}(f, d_0) \frac{\partial V_{ij}(f)}{\partial f_k} \right] \Delta d_k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (6)}$$

上式中、限界状態の部材応力 \$N_{ij}(f, d_0)\$ は単位荷重状態 (\$P_E = 1\$) の部材応力を \$\bar{N}_{ij}\$ とすると、次式で表わされる。さらに、付加変位 \$\Delta d_k\$ を新たに \$d_k\$ とすると式(6)は式(8)で表わされる。

$$N_{ij}(f, d_0) = P_E \bar{N}_{ij} \quad \text{--- (7)}$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left[(N_{ij}^0(f, d^0) \frac{\partial \lambda_{ij}(f)}{\partial f_k} + (\frac{\partial N_{ij}(f, d_0)}{\partial d_k})_{d=d_0} \lambda_{ij}(f)) \right] d_k + P_E \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \bar{N}_{ij} \frac{\partial \lambda_{ij}(f)}{\partial f_k} d_k = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ N_{ij}^0(f, d^0) \frac{\partial \mu_{ij}(f)}{\partial f_k} + \left(\frac{\partial N_{ij}(f, d)}{\partial d_k} \right)_{d=d^0} \mu_{ij}(f) \right\} d_k + P_E \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \bar{N}_{ij} \frac{\partial \mu_{ij}(f)}{\partial f_k} d_k - 0 \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ N_{ij}^0(f, d^0) \frac{\partial \nu_{ij}(f)}{\partial f_k} + \left(\frac{\partial N_{ij}(f, d)}{\partial d_k} \right)_{d=d^0} \nu_{ij}(f) \right\} d_k + P_E \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \bar{N}_{ij} \frac{\partial \nu_{ij}(f)}{\partial f_k} d_k - 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式(8)を構造物の各節点に適用し行列表示すると次式となる。

$$(K_1 + K_2) d + P_E K_2 d = 0 \quad \dots \quad (9)$$

有限変形位置における弾性座屈理論式

先行荷重が作用した状態の変位を d^0 とすると、先行荷重による変形後の座標 f^0 は $f^0 = f + d^0$ で表わされる。さらに、座屈荷重 P_E が作用し座屈直前までの P_E による変位を d^0 とすると、先行荷重および座屈荷重による変形後の座標 f_0^* は $f_0^* = f + d^0 + d_0^* = f^0 + d_0^*$ で表わされる。

P_E が作用した座屈直前の変形様式における節点 i のつりあい式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^m (N_{ij}^0(f, d^0) + N_{ij}(f^0, d_0^*)) \lambda_{ij}(f_0^*) - X_i^0 - X_i = 0 \\ \sum_{j=1}^m (N_{ij}^0(f, d^0) + N_{ij}(f^0, d_0^*)) \mu_{ij}(f_0^*) - Y_i^0 - Y_i = 0 \\ \sum_{j=1}^m (N_{ij}^0(f, d^0) + N_{ij}(f^0, d_0^*)) \nu_{ij}(f_0^*) - Z_i^0 - Z_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (10)$$

座屈直前の変形様式に付加変位 Δd を加えた座屈変形様式におけるつりあい式は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^m (N_{ij}^0(f, d^0) + N_{ij}(f^0, d_0^0 + \Delta d)) \lambda_{ij}(f_0^0 + \Delta d) - X_i^0 - X_i = 0 \\ \sum_{j=1}^m (N_{ij}^0(f, d^0) + N_{ij}(f^0, d_0^0 + \Delta d)) \mu_{ij}(f_0^0 + \Delta d) - Y_i^0 - Y_i = 0 \\ \sum_{j=1}^m (N_{ij}^0(f, d^0) + N_{ij}(f^0, d_0^0 + \Delta d)) \nu_{ij}(f_0^0 + \Delta d) - Z_i^0 - Z_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (11)$$

上式を整理すると、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ \left\{ N_{ij}^0(f, d^0) \frac{\partial \lambda_{ij}(f_0^0)}{\partial f_k} + \left(\frac{\partial N_{ij}(f, d)}{\partial d_k} \right)_{d=d^0} \lambda_{ij}(f_0^0) \right\} + N_{ij}(f^0, d_0^0) \frac{\partial \lambda_{ij}(f_0^0)}{\partial f_k} \right\} \Delta d_k = 0 \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ \left\{ N_{ij}^0(f, d^0) \frac{\partial \mu_{ij}(f_0^0)}{\partial f_k} + \left(\frac{\partial N_{ij}(f, d)}{\partial d_k} \right)_{d=d^0} \mu_{ij}(f_0^0) \right\} + N_{ij}(f^0, d_0^0) \frac{\partial \mu_{ij}(f_0^0)}{\partial f_k} \right\} \Delta d_k = 0 \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ \left\{ N_{ij}^0(f, d^0) \frac{\partial \nu_{ij}(f_0^0)}{\partial f_k} + \left(\frac{\partial N_{ij}(f, d)}{\partial d_k} \right)_{d=d^0} \nu_{ij}(f_0^0) \right\} + N_{ij}(f^0, d_0^0) \frac{\partial \nu_{ij}(f_0^0)}{\partial f_k} \right\} \Delta d_k = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

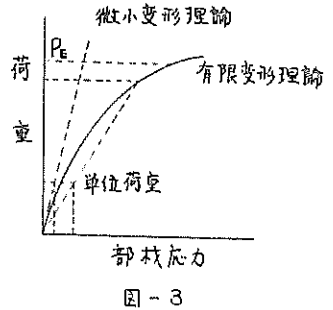
有限変形理論では、図-3に示すように、部材応力 N_{ij} と荷重とは正比例しない。したがって、 P_E による部材応力 $N_{ij}(f^0, d_0^0)$ は、式(7)の関係を満たさない。今、 P_E の近似値 P_E' が仮定できたとして、有限変形理論により P_E' なる荷重状態のときの部材応力 N_{ij}' を求め、 N_{ij}' / P_E' を単位荷重状態の部材応力 $\bar{N}_{ij}$ とする。すると、 $P_E = P_E'$ のとき、 $N_{ij}(f^0, d_0^0)$ は、式(7)の関係を満

す。すなわち、

$$N_{ij}(f^0, d^0) = P_E \bar{N}_{ij} \quad \dots \quad (13)$$

式(12)に上の関係を入れ、 Δd_k を新たに d_k として、次のように整理される。

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ N_{ij}(f, d) \frac{\partial \lambda_{ij}(f_k^0)}{\partial f_{k0}^0} + \left(\frac{\partial N_{ij}(f, d)}{\partial d_k} \right)_{d=d^0} \lambda_{ij}(f_k^0) \right\} d_k + P_E \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \bar{N}_{ij} \frac{\partial \lambda_{ij}(f_k^0)}{\partial f_{k0}^0} d_k = 0$$



$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ N_{ij}(f, d) \frac{\partial u_{ij}(f_k^0)}{\partial f_{k0}^0} + \left(\frac{\partial N_{ij}(f, d)}{\partial d_k} \right)_{d=d^0} u_{ij}(f_k^0) \right\} d_k + P_E \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \bar{N}_{ij} \frac{\partial u_{ij}(f_k^0)}{\partial f_{k0}^0} d_k &= 0 \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ N_{ij}(f, d) \frac{\partial v_{ij}(f_k^0)}{\partial f_{k0}^0} + \left(\frac{\partial N_{ij}(f, d)}{\partial d_k} \right)_{d=d^0} v_{ij}(f_k^0) \right\} d_k + P_E \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \bar{N}_{ij} \frac{\partial v_{ij}(f_k^0)}{\partial f_{k0}^0} d_k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式(14)を各節点に適用し行列表示すると次式となり、固有値問題として、 P_E を求める。

$$(K_1' + K_1'') d + P_E K_2' d = 0 \quad \dots \quad (15)$$

適用例

図-4に示すフリーストリプアーチを解析した結果を示す。解析は先行荷重がない場合、図-4に示す鉛直先行荷重を受ける場合、および図-4に示す水平先行荷重を受ける場合について行なった。

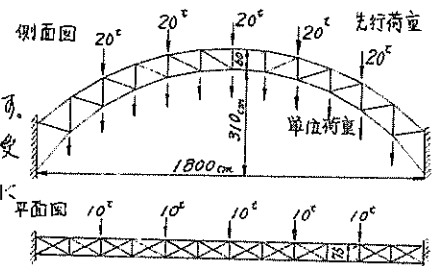


表 - 1

次数	先行荷重 0t		鉛直荷重 20t		水平荷重 10t	
	対称	逆対称	対称	逆対称	対称	逆対称
1	38.6 (38.6)	59.4	27.1 (27.1)	49.2	39.0 (39.1)	58.8
2		59.3 (59.4)		(49.1) (49.2)		60.6 (58.8)

上弦材および下弦材断面積 = 7.510 cm²

腹材断面積 = 3.755 cm²

表-1の括弧内の値は微小変形位置における座屈結果である。

後藤茂夫：有限変形法の理論と応用（九州大学学位論文）

大坂・井上・熊野・江草：ニールセン橋りょうの座屈に関する研究，三菱重工技報，第3巻，第6号
藤野勉 大坂憲司：構造物一般の弾性座屈解析法についての考察，第22回土木学会年次学術講演会
講演概要。