

徳島大学工学部 正員 工修 見島 弘行
 徳島大学工学部 正員 工修 平尾 潔
 川崎重工業 K.K. 正員 工修 〇佐伯 尚

§1 まえがき

平面構造物の骨組により構成されるネットワークのもつ本質的な性質と利用したネットワーク解析と、弾性安定解析に適用する方法について述べる。

§2 基礎式の誘導

弾性安定解析の静的な力の釣合方程式を誘導し、弾性線形理論の場合のそれと比較する。

1) Stiffness matrix および Flexibility matrix

Fig-1 のように平面構造物に含まれる任意の部材 IF について、部材端 I を原点とし、部材軸と x 軸とを一致させて部材固有の直交座標系 $O'-x'y'$ (Local 座標系) を設け、部材力 $\mathbf{F}_i^T = \{N, Q, M\}_i$ 、および、部材変形量 $\mathbf{F}_i^U = \{\delta_x, \delta_y, \theta\}_i$ の正方向を座標軸に準拠させる。

いま、軸力による曲げ変形を考慮した F はりの変形の微分方程式から、部材端力と部材変形量との関係をもとめるとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_I^T &= \mathbf{IK}_I \mathbf{U}_I + \mathbf{IFK}_F \mathbf{U}_F \\ \mathbf{F}_F^T &= \mathbf{FIK}_I \mathbf{U}_I + \mathbf{FFK}_F \mathbf{U}_F \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 I 端と F 端との部材端力の関係は、

$$\mathbf{F}_F^T = \mathbf{FT}_I \mathbf{F}_I^T \quad \mathbf{FT}_I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ (x\delta_y - y\delta_x) & L & -1 \end{bmatrix}_i \quad (2)$$

となる。一方 $\mathbf{IK}_I$ と $\mathbf{IFK}_F$ との関係は、

$$\mathbf{IFK}_I = \mathbf{IK}_I \mathbf{ST}_I \quad \mathbf{ST}_I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{L^2 y_1}{4y_1^2 - 3y_2^2} & \frac{2y_1 y_2 - 3y_2^2}{4y_1^2 - 3y_2^2} \end{bmatrix}_i \quad (3)$$

となる。したがって

$$\mathbf{F}_I^T = \mathbf{IK}_I (\mathbf{U}_I + \mathbf{ST}_I \mathbf{U}_F) = \mathbf{IK}_I \delta_i \quad (4)$$

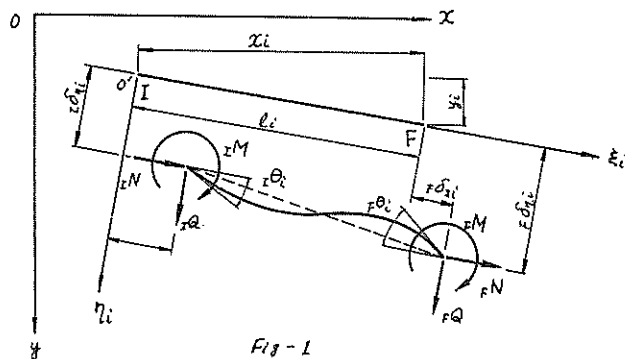


Fig-1

と表わされ、式(1)の第2式に、式(4)の関係を代入すると

$$F^T F \tilde{U}_i = F^T (F_I K_i U_i + F_F K_i F U_i) = F_I K_i U_i + F_F K_i F U_i = F_I K_i \delta_i \quad (5)$$

であるから、枝要素iの代表的な Stiffness matrix として、式(7)で表わされる $F_I K_i$ を用いてよい。したがって、式(1)の、第2式は、つぎのように、1つの式で代表される。

$$\tau = K \delta$$

また、式(6)を δ について解けば、Flexibility matrix が求まり、式(7)のようになる。 (6)

$$K_i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} \varphi_3 & \frac{6EI}{l^2} \varphi_2 \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} \varphi_2 & \frac{4EI}{l} \varphi_1 \end{bmatrix}_i \quad F_i = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3 \varphi_3}{3EI(4\varphi_1 \varphi_3 - 3\varphi_2^2)} & -\frac{l^2}{2EI(4\varphi_1 \varphi_3 - 3\varphi_2^2)} \\ 0 & -\frac{l^2}{2EI(4\varphi_1 \varphi_3 - 3\varphi_2^2)} & \frac{l \varphi_1}{EI(4\varphi_1 \varphi_3 - 3\varphi_2^2)} \end{bmatrix}_i \quad (7)$$

ここで $IN_i > 0$ の場合

$$\varphi_1 = \frac{\lambda l}{2} \frac{\sin \lambda l}{1 - \cos \lambda l}$$

また $IN_i < 0$ の場合

$$\varphi_1 = -\frac{\lambda l}{2} \frac{\sinh \lambda l}{1 - \cosh \lambda l}$$

$$\varphi_2 = \frac{\lambda^2 l^2}{6} \frac{1 - \cos \lambda l}{2(1 - \cos \lambda l) - \lambda l \sin \lambda l}$$

(8)₁

$$\varphi_2 = -\frac{\lambda^2 l^2}{6} \frac{1 - \cosh \lambda l}{2(1 - \cosh \lambda l) - \lambda l \sinh \lambda l}$$

(8)₂

と使い分けて計算し、 φ_3, φ_4 および φ_5 は、これらを用いて、

$$\varphi_3 = \frac{1}{4}(3\varphi_2 + \varphi_1), \quad \varphi_4 = \frac{1}{2}(3\varphi_2 - \varphi_1) \quad \varphi_5 = \varphi_1 \varphi_2 \quad (9)$$

と表す。したがって

$$\lambda^2 = |IN_i| / EI$$

(10)

である。線形の場合には各係数はそれぞれ、つぎのようである。

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5 = 1$$

$$F_i = {}_5T_i = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & l & -1 \end{bmatrix}_i \quad (11)$$

2) Rotation matrix

Fig-1の枝要素iについて 空間固定座標系 0-xy (Global座標系) と Local座標系 (グリン) とをつくる) とに対する諸量の関係は、

$${}^F \tilde{U}_i = R_i {}^L \tilde{U}_i \quad {}^F V_i = R_i {}^L V_i \quad (12)$$

となり

$$R_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & 0 \\ -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left. \begin{aligned} \sin \alpha_i &= \frac{y_i + (F \delta_{\eta i} - I \delta_{\eta i})}{l_i} \\ \cos \alpha_i &= \frac{x_i + (F \delta_{\xi i} - I \delta_{\xi i})}{l_i} \\ l_i &= \sqrt{\{x_i + (F \delta_{\xi i} - I \delta_{\xi i})\}^2 + \{y_i + (F \delta_{\eta i} - I \delta_{\eta i})\}^2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

である。ここで 有限変位を考慮しない場合、および、線形理論の場合、つぎのようにおけばよい。

$$F \delta_{\eta i} - I \delta_{\eta i} = 0, \quad F \delta_{\xi i} - I \delta_{\xi i} = 0 \quad (14)$$

3) Modified Incident Matrix

release を含まない構造物では、部材変形量 δ 。その部材が接続している節点変位で代表させることができるので、式(6)および(12)の関係より、変形の連続条件は、

$$\delta = s Q U \quad (15)$$

となり, $s Q$ は枝と節点との連結関係より, つぎの内容をもっている.

$$s Q_{ij} = \begin{cases} R_i & \text{枝要素 } i \text{ が節点 } j \text{ に正連結のとき} \\ s^T R_i & \text{枝要素 } i \text{ が節点 } j \text{ に負連結のとき} \\ 0 & \text{枝要素 } i \text{ が節点 } j \text{ に非連結のとき} \end{cases}$$

つぎに Global座標系に対する外力 P と材端力 T' との関係は,

$$P = F Q T' \quad (16)$$

と表わされ, $F Q$ の要素 $F Q_{ij}$ は, 枝と節点との連結関係より, つぎの内容をもっている.

$$F Q_{ij} = \begin{cases} R_i^T & \text{枝要素 } i \text{ が節点 } j \text{ に正連結のとき} \\ R_i^T T_i & \text{枝要素 } i \text{ が節点 } j \text{ に負連結のとき} \\ 0 & \text{枝要素 } i \text{ が節点 } j \text{ に非連結のとき} \end{cases}$$

そこで, 静的な力の釣合方程式は, 式(6)(15)および(16)より

$$(F Q K s Q) U = P \quad (17)$$

となる.

線形理論の場合には,

$$F Q^T = s Q = Q \quad (18)$$

であり, 静的な力の釣合方程式は, つぎのようになる. 文献 1)

$$(Q^T K Q) U = P \quad (19)$$

4) 解の求め方

式(18)を U について解けば,

$$U = (F Q K s Q)^{-1} P \quad (20)$$

となり, 節点変位が求まるが, この場合には, 材端力と, 材端変位との関係は, 軸力を考慮するため, 非線形関係となるので, 必ず, 軸力を無視した式(19)より近似解をもとめ, つぎに, この近似解を用いて, 式(20)を解き, 解が収束するまでくりかえせばよい.

また, 安定解析の方法としては, 座屈方程式の固有値から座屈荷重を求める方法と, 静的な力の釣合方程式の係数行列の determinant の正負を判定し, この値を零とする最小の荷重強度を求める荷重増法があるが, ここでは, 解析の途中の変形状態が, 追跡できる後者の方法を採用した.

5.3. 解析上の仮定

この解析で用いた主な仮定を挙げれば, つぎのようである.

- 1) 部材の捩り座屈および局部座屈は, 考慮しない.
- 2) 構造物が座屈をおこすまでに塑性化部材は出現しないものとする.
- 3) 荷重としては, 漸増節点荷重だけを考える.
- 4) 部材は, 等断面の直線部材とする.
- 5) 曲げによる軸方向の変化は考慮しない.

5.4. 計算例

以上の理論を用いて, 京都大学大型計算機 FACOM 230-60 を対象として, プログラミングを.

行ない、Fig-2に示す $\phi 50\text{cm}$ の円形断面をもつラーメンの解析を行なう。

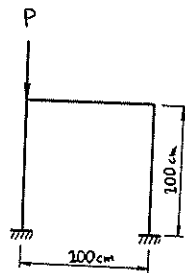
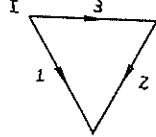


Fig-2

Linear graph



Incident matrix

Branch	Node	
	I	II
1	1	0
2	0	1
3	1	-1

荷重強度 P	determinant の値
51.56 (t)	0.7609×10^{33}
74.24	0.3054×10^{33}
93.54	0.8165×10^{31}
94.66	-0.1133×10^{32}

table-1

Table-1 より 座屈荷重は、93.54t ~ 94.66t の間と求まり、文献 (4) の、通常の変形法による解析では、94t となっており 妥当な座屈荷重が求められた。

5.5 結言

弾性安定解析では、曲げモーメントにおよぼす軸力の影響を考慮するため、従来のネットワーク理論で用いられた Modified Incident Matrix (20) を、そのままの形で、適用することができない。そこで、(20) および (21) の新しい Modified Incident Matrix を誘導し、解析に組み込んだ。さらに、式 (20) を解く場合、Householder の式を適用すれば、ネットワーク理論のもつ組織的、能率的な解決となり、電子計算機の使用に適している。

なお、プログラミングの際、Incident matrix を、そのままデータとして与えれば、構造が複雑になると、データ数が、非常に多くなるので、この点を改良して、両端の節点番号とデータとして与え、計算機内で Incident matrix を作成するようにして、データ数の削減をはかった。

参考文献

- 1) F. L. DiMaggio & W. R. Spiller "Network Analysis of Structures" E. M. Proc. ASCE. Vol. 91 (1965) Jun.
- 2) A. S. Householder "A Survey of Some Closed Method for Inverting Matrices" Journal of Soc. of Ind. and Appl. Math. (1958)
- 3) S. J. Fennes & F. H. Branin "Network-Topological Formulation of Structural Analysis" S.T. ASCE. Vol. 92 (1966) Feb.
- 4) 平尾 深 "剛滑節構造物の安定解析についての研究" S. 40.3. 修士論文.