

徳島大学工学部 正会員 児嶋弘行

" " 平尾 潔

" 学生員 矢野照雄

1. はじめに 降伏条件式に曲げと捩りとの組み合わせを考え、塑性流動理論を導入した場合の格子構造物に対する塑性解析については、J. Heyman¹⁾, R. Hill & M. P. L. Siebel²⁾などの機構法による著名な研究があり、わが国においても、米沢三郎^{3),4)}らが、この理論を拡張し、直交格子桁および曲線格子桁を対象として、崩壊荷重とか最大たわみなどに対する理論値と実験値との比較検討を行なっている。

しかしながら、これらの文献1), 2), 3)の理論解は機構法によるものであり、1)崩壊の途中経過が不明である。2)複雑な構造物では真の崩壊形式を見出すことが困難である。3)電子計算機が利用しにくい。などの改良すべき点が考えられる。これらの点を改良するためには内力追跡法による弾塑性解析が適当と思われる。筆者らは数年前からこの種の研究に着手し、文献4)のような近似解析手法について報告したが、この文献4)では、塑性流動条件を無視して、ある断面の組み合わせ応力(曲げモーメントと捩りモーメント)が降伏条件を満足した時点で同時に2応力方向の剛性を失うものと仮定しているため、組み合わせ応力的一方が(非常に)小さい場合には、塑性流動理論を考慮した場合の結果と崩壊荷重とか崩壊過程に、かなりの相異を生じることが考えられる。

したがって、降伏条件式に組み合わせ応力を考慮する場合には、塑性流動理論を導入し、内力追跡法で解析することが好ましいと思われるが、その場合には降伏断面における応力-ひずみの関係が非線形となり解析がかなり複雑となるため、この応力ひずみの非線形関数を線形関数におきかえるための線形近似の手順が必要となる。以上のようなことから、筆者らは文献5)の線形近似の方法を参考にし、降伏条件式に曲げと捩りとの組み合わせを考え、塑性流動理論を導入した場合の、漸増節点荷重をうける任意の格子構造物に対する内力追跡法による近似の弾塑性解析法について研究し、初期のinput dataを与えるだけで、電子計算機が自動的に崩壊過程を追跡し、必要な演算結果をout putするような解析プログラムの作成をこころみ、一応の成果を得た。したがって、ここでは本研究における解析上の仮定、線形近似の方法、降伏端部材に対する基本式の誘導および解析手順などについて紹介し、解析例については講演会当日発表する予定である。

2. 解析上の仮定 本研究の解析に用いたおもな仮定はつぎのようである。1)材料は完全弾塑性体で理想化された応力-ひずみ曲線をもつものとし、ひずみ硬化の影響は無視する。2)材料の応力-ひずみ特性は時間に独立とし、塑性流動理論における応力速度増分とひずみ速度増分の関係を応力増分とひずみ増分の関係におきかえて考える。3)断面の形状係数は1とし、塑性域の部材軸方向のねがりは無視する。4)降伏条件式には曲げモーメントと捩りモーメントの組み合わせを考え、J. Heyman¹⁾の降伏条件式 $M^2 + \alpha T^2 = M_p^2$ を使用し、剪断力の影響は考慮しない。5)荷重としては、漸増節点荷重だけを考え、変形に伴う構造形状の幾何学的変化は無視する。

なお、本文ではある断面が曲げと捩りとを同時にうけて降伏した場合にはその断面を降伏関節とよ

び、曲げだけあるいは捩りだけをうけて降伏した場合には塑性関節とよぶことにする。

3. 線形近似 (piecewise linearise) の方法について 曲げモーメント M と捩りモーメント T との組み合わせによる降伏条件式を考えた場合、任意断面 i が降伏すれば、断面 i での塑性変形増分ベクトル $d\mathbf{\bar{\epsilon}}_i^p$ 、応力増分ベクトル $d\mathbf{\bar{\sigma}}_i$ の方向は、それぞれ図-1 のように i 点における外向き法線および接線方向と一致し、これらの間には直交条件より式(1)が成立する。

$$\mathbf{\bar{\epsilon}}_i^t \cdot d\mathbf{\bar{\sigma}}_i = 0 \quad (\mathbf{\bar{\epsilon}}_i^t = d\mathbf{\bar{\sigma}}_i^p / \mu_i) \quad (1)$$

ただし、 $\mathbf{\bar{\epsilon}}_i^t$: i 点における外向き法線ベクトル、 μ_i : 流水定数 (正のスカラー量) である。

これらの $\mathbf{\bar{\epsilon}}_i^t$, $d\mathbf{\bar{\sigma}}_i$ の方向は断面 i の塑性変形に伴ってたえず変化した、降伏後の断面 i における応力増分 $d\mathbf{\bar{\sigma}}_i$ の関係が非線形となり、解析が煩雑になるため、つぎのような手順により線形近似を行う。

1) 降伏曲線上の i 点 (断面 i における応力点) における法線ベクトル $\mathbf{\bar{\epsilon}}_i^t$ 、応力増分ベクトル $d\mathbf{\bar{\sigma}}_i$ の方向を決定する。

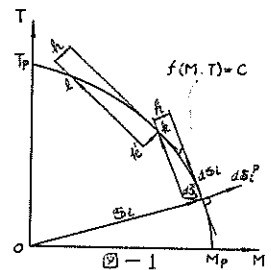
2) あらかじめ定められた値 n により式(2)にしたがって i 断面の応力ベクトル $\mathbf{\bar{\sigma}}_i$ を $d\mathbf{\bar{\sigma}}_i$ だけ降伏曲線の内側へ移動する。

$$\mathbf{\bar{\sigma}}_i^* = \mathbf{\bar{\sigma}}_i - n d\mathbf{\bar{\sigma}}_i \quad (2)$$

3) 降伏後の荷重増加に対しては断面 i における $\mathbf{\bar{\epsilon}}_i^t$ の方向を一変と考へ応力も直線 $\mathbf{\bar{\sigma}}_i^*$ に沿って変化するものと仮定する。 ($d\mathbf{\bar{\sigma}}_i / d\mathbf{\bar{\epsilon}}_i^t$)

4) i 点について 1), 2), 3) と同様な手順を繰返す。

なお、以上の 1)~4) の手順を各降伏関節で繰返すことにより、非線形解析を線形解析におきかえることができる。



4. 降伏端部材に対する変形法の基本式の誘導 本文では内力追跡法の計算手段として変形法を使用した。塑性流動条件を導入したことにより、文献(6)などで用いた基本式以外に降伏関節端を有する部材の基本式を新たに誘導しておく必要がある。したがって、以下に両端剛節部材 $\overline{ij}$ の i 端が降伏した場合を例にとって、その誘導方法を簡単に紹介する。

両端剛節部材 $\overline{ij}$ の部材軸と x 軸を一致させた x - y 系に対する材端力 $\mathbf{\bar{\sigma}}_i$ と節点変位量 $\mathbf{\bar{\delta}}_i$ との間には一般につぎの式(3)の関係がある。

$$\mathbf{\bar{\sigma}}_i = \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{\bar{\delta}}_i + \mathbf{K}_j \cdot \mathbf{\bar{\delta}}_j \quad (3)$$

$$\text{ここで、} \mathbf{\bar{\sigma}}_i = \{T \ Q \ M\}_{ij}^t, \quad \mathbf{\bar{\delta}}_i = \{\theta_z \ s_z \ \theta_x\}_i^t, \quad \mathbf{\bar{\delta}}_j = \{\theta_z \ s_z \ \theta_x\}_j^t \quad (4)$$

であり、 $\mathbf{K}_i$, $\mathbf{K}_j$ は stiffness matrix である。

いま、両端剛節部材 $\overline{ij}$ の i 端に降伏関節が発生したものと仮定すれば、その後の微小な荷重増加に対する降伏端 i の変形量の増分 $d\mathbf{\bar{\sigma}}_i$ は弾性増分 $d\mathbf{\bar{\sigma}}_i^e$ と塑性増分 $d\mathbf{\bar{\sigma}}_i^p$ とに分解され、つぎの式(5)のように表わされる。

$$d\mathbf{\bar{\sigma}}_i = d\mathbf{\bar{\sigma}}_i^e + d\mathbf{\bar{\sigma}}_i^p = d\mathbf{\bar{\sigma}}_i^e + \mu_i \cdot \mathbf{\bar{\epsilon}}_i^t \quad (5)$$

ここで、前述のような降伏条件式 $f(M, T) = M^2 + \alpha T^2 = M_p^2$ を使用する場合には、式(5)の $\mathbf{\bar{\epsilon}}_i^t$ はつぎの式(6)のように表わされる。

$$\mathbf{\bar{\epsilon}}_i^t = \{\alpha \ 0 \ \beta\}_i^t \quad (\text{ただし、} \alpha_i = (\partial f / \partial T) = 2\alpha T_i, \quad \beta_i = (\partial f / \partial M) = 2M_i) \quad (6)$$

したがって、この場合の材端力の増分 $d\mathbf{\bar{\sigma}}_i$ は式(3)に両端における弾性変形増分 $d\mathbf{\bar{\sigma}}_i^e$, $d\mathbf{\bar{\sigma}}_j$ を代入し、式(5), (6)の関係を用いればつぎの式(7)のようになる。

$$d\mathbf{\bar{\sigma}}_i = \mathbf{K}_i \cdot \alpha d\mathbf{\bar{\delta}}_i + \mathbf{K}_j \cdot d\mathbf{\bar{\delta}}_j - \mathbf{K}_i \cdot \mu_i \cdot \mathbf{\bar{\epsilon}}_i^t \quad (7)$$

$$k \neq 0, \quad \mu_i = (G_i^T \cdot K_i \cdot \delta_i + G_i^T \cdot K_j \cdot \delta_j) \cdot T_i \quad (8)$$

$$\mu_i = (G_i^T \cdot K_i \cdot \delta_i + G_i^T \cdot K_j \cdot \delta_j) \cdot T_i \quad \text{--- (8)}$$

$$t \in L, \quad T_i = (G_i^T \cdot K_i \cdot G_i)^{-1} \quad (9)$$

この α を式(7)に代入し、整理すれば、式(3)と同様な α と β の関係がつぎの式(10)のように得られる。

$$S_i = K'_i \cdot \delta_i + K'_j \cdot \delta_j \quad (10)$$

$$= \mathbb{C}^n, \quad K_i' = K_i (\mathbb{I} - G_i \cdot G_i^T \cdot K_i \cdot T_i), \quad K_j' = (\mathbb{I} - K_i \cdot G_i \cdot G_i^T \cdot T_i) K_j, \quad (\mathbb{I} = \text{单位行列}) \quad (11)$$

以上は二端降伏， i 端剛節部材に対する基本式の誘導方法であったが，これと異なるその他の二端条件の場合に於てこれと同様に誘導される。

5. 線形近似にとりなすベクトル移動量 3. で述べたような線形近似を行なうためには、ある杆端が降伏した場合、荷重を増加する以前に降伏端における応力ベクトルを式(2)によって移動させておく必要がある。したがって、以下に両端剛節部材の一端が降伏した場合を例にとり、その誘導方法を紹介する。荷重に変化がなければ杆端が降伏して全体的釣合状態はそのまゝ保たれるものと仮定すれば、杆端では、
$$\delta i^e = -\delta i^p = -u_i \cdot G_i$$
 (12)

$$\mathcal{D}_i^e = -\mathcal{D}_i^p = -\mu_i \cdot Gr_i \quad (12)$$

だけ弾性変位量に変化が生じ、したがって、部材 i の材端力 $\bar{S}_i$ は式(3)より、つぎの式(13)だけ変化することになる。

$$d\bar{S}_i = -K_i \cdot u_i \cdot G_i, \quad d\bar{S}_j = -K_j^* \cdot u_i \cdot G_i \quad (13)$$

$$d\overline{S}_i = -|K_i| \cdot \mu_i \cdot G_i, \quad d\overline{S}_j = -|K_j^*| \cdot \mu_i \cdot G_i \quad (13)$$

この式(13)を式(2)に代入して u を求めれば,

$$\mu_i = (G_i^* \cdot \|K_i \cdot G_i\|)^{-1} \cdot h = T_i \cdot h \quad (14)$$

となり，これを式(3)に代入すれば，求めるベクトル移動量 $d\bar{S}$ がつぎの式(4)のように得られる。

$$d\bar{S}_i = -K_i \cdot G_i \cdot T_i \cdot h, \quad d\bar{S}_j = -K_j^* \cdot G_j \cdot T_j \cdot h \quad (15)$$

なお、式(44)、(45)の Stiffness matrix K_L , K_j には材端 i の降伏前の値を用いることが必要である。

以上のようなベクトル移動により最初の釣合状態がみだされることになるから、この移動量を節点荷重におきかえて応力の再配分を行なわなければならない。

6. 座標変換 4, 5. で求めた α と β との関係は固有座標系 $x-y-z$ に対する結果であったが, この α と β の関係は座標変換行列 R を用いて, 式(4)により図-2の基準座標系 $x'-y'-z'$ に対する P と U との関係に容易に変換される。

$$P_i = R_{i1} \cdot S_i, \quad \delta_i = R_{i1}^t \cdot U_i, \quad \delta_j = R_{ij}^t \cdot U_j \quad \text{--- (16)}$$

 $\zeta \zeta^*$

$$P_i = \{M_x \ Q \ M_y\}_i^T, \ U_i = \{\theta_x \ \delta_z \ \theta_y\}_i^T, \ U_j = \{\theta_x \ \delta_z \ \theta_y\}_j^T \quad (17)$$

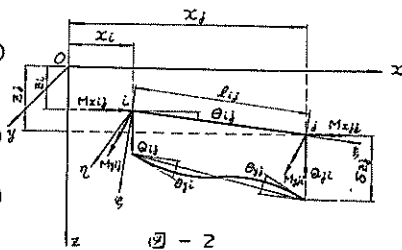
$$R_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{--- (18)}$$

ただし、 θ は x 軸と x' 軸とのなす角である。

なお、これらの⑤、⑥、および、 P 、 U の正の向きは図-2のそれぞれの座標軸に準拠させるものとある。

7. 解析手順 本文における弾塑性解析はつぎの1)~6)の手順の繰返しによって進められる。

1)線形解析, 2)弾性変位の判定, 3)荷重倍数の計算, 4)降伏端におけるベクトル移動, 5)Stiffness



matrixの修正, ②崩壊の判定。これらの1)~②の手順を繰返してゆけば, 釣合方程式のStiffness matrixが0に近づく(機構の形成)が変形量のある成分が限界値に達して崩壊することになる。

なお, この場合の解析プログラムにおける演算の流れは図-3のようである。

8. 問題点 本法には, 3.で述べたような線形近似の手順が含まれているため, この手順におけるベクトル移動量の値によって解の精度が左右されるという問題があり, 一般に δ の値が大きすぎれば解の精度は低下し, 小さければ繰返しの手順がふえ, 多くの演算時間を要すること

になる。このような傾向は, 構造形式とか载荷形式によって異なるものと考えられるから, 今後, 多くの解析を行なって検討しなければならぬ問題であるが, より正確な解を求めるためには, 演算時間は多少増大して, できるだけ δ の値を小さな値にとり解析することが必要と思われる。

9. 参考文献

- 1) J. Heyman : The limit design of Space Frames, J. Applied Mechanics, 1951.
- 2) R. Hill and M.P.L. Siebel : On the Plastic Distortion of Solid Bars by Combined Bending and Twisting, J. Mech. and Phys. of Solid, 1953.
- 3) 米沢 博 : 格子桁構造の極限荷重に関する一研究, 土木学会論文集, 65号, 昭和34年.
- 4) 米沢・三上 : 曲線格子桁の極限解析について, 土木学会論文集, 132号, 昭和41年8月.
- 5) Glenn A. Morris and Steven J. Fennes : Elastic-Plastic Analysis of Frame works, J. of St. Div. Proc. A.S.C.E., Vol. 96, May, 1970.
- 6) 児嶋弘行・平尾 潔 : 格子桁の崩壊過程の追跡について, 第23回土木学会年次学術講演要集第I部, 昭和43年10月.

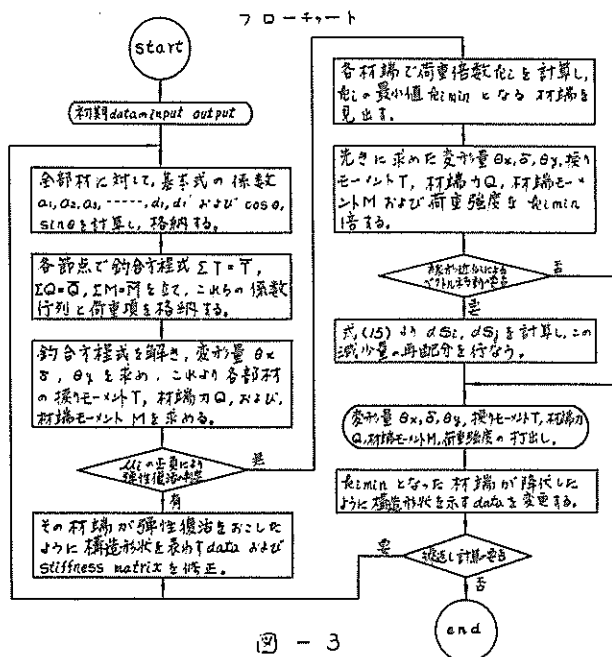


図 - 3