2―10　　非均質・異方性地盤中の流れに関する有限要素解析について

徳島大学工学部　正員　小田英一
徳島大学工学部　正員○山上拓男

1．まえがき　；　浸透流場の解析には古来多くの方法が用いられてきたが、いずれも与えられた場の境界条件や透水性が複雑になると、その近似解を得ることさえも極めて困難な状態であった。近年、電子計算機のめざましい発展にともない、エネルギーにおける変分原理に基いた有限要素法が連続体の応力解析に取り入れられ、有益な結果をあげている。この有限要素法の概念を、変分法におけるEulerの理論を媒介として、定常浸透流場の基礎微分方程式に導入し、複雑な境界条件下における非均質・異方性地盤中の流れの解析[1]や、堤体中の浸潤線決定に応用せんとする研究[2,3,4]がなされている。これらの研究はいずれも、水頭分布のみの決定から流量その他を算定している。本研究においては、主として堤体基礎の非均質、異方性地盤中の流れに関して、水頭分布のみならず流線の決定方法についても解説したものである。

2．水頭分布の決定　；　定常状態における二次元浸透流場を支配する基礎微分方程式が、流れの主軸方向にとった座標系 (x,y) に関して、一般に次式で表わされることは周知の通りである。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial H}{\partial y}\right)=0 \qquad (1)$$

したがって、流れの状態を知るためには上式を適当な境界条件のもとで解き、水頭Hの分布を求め、x, y 方向の透水速度 v_x, v_y を次式から計算すればよい。

$$v_x=-k_x\frac{\partial H}{\partial x}\quad,\quad v_y=-k_y\frac{\partial H}{\partial y} \qquad (2)$$

一方、変分法におけるEulerの理論によれば、汎関数と呼ばれる次の積分

$$E=\iint f\left(x,y,H,\frac{\partial H}{\partial x},\frac{\partial H}{\partial y}\right)dx\,dy \qquad (3)$$

を極小にするための条件、すなわちEulerの式は、x、y の未知関数Hが、同じ領域内で微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial H}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial H_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{H_y}\right)=0 \qquad (4)$$

を満足することである。この理論によれば、(1)式の解は

$$E=\frac{1}{2}\iint\left\{k_x\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+k_y\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy \qquad (5)$$

で表される汎関数Eの値を極小ならしめるHの分布を求める問題と等価となる。

有限要素法を適用するにあたっては、図－1に示すように解析領域を三角形要素に分割し、各要素内では透水係数 k_x, k_y が一定であるとし、各要素内での水頭Hの分布が最も簡単な一次形式

$$H=A+B\cdot x+C\cdot y \qquad (6)$$

で表わされるものと仮定する。この(6)式を(5)式に代入し、極小化の手順を経れば、求めるべき各節点での水頭の値は、次式で示される連立方程式を解けばよい。なお、これに関しての詳細は文献を参照

されたい。

$$[h]\begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \end{Bmatrix} = 0 \qquad (7)$$

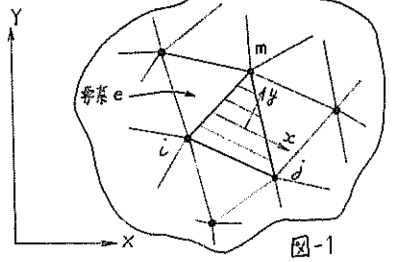

図-1

ここに、マトリックス $[h]$ は浸透性行列（seepage matrix）とよばれ、弾性問題における stiffness matrix に相当するものである。

3．流線の決定 ； 流れの関数を ψ とすると、一般に $v_x = \partial\psi/\partial y$, $v_y = -\partial\psi/\partial x$ なる関係がある。この関係に(2)式を用いれば

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{k_x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y} \ , \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{k_y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (8)$$

この(8)式を(5)式に代入すると、次の関係が得られる。

$$E = \frac{1}{2}\iint\left\{\frac{1}{k_y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{k_x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy \qquad (9)$$

これより、流れの関数 ψ を求めることは、上式で表わされる汎関数Eの値を極小にするような関数 ψ を決定することと等価となる。しかるに(5)式と(9)式を比較すると、$H \to \psi$, $k_x \to 1/k_y$, $k_y \to 1/k_x$ と変換されているのみであるから水頭分布の決定に関する理論において、$k_x \to 1/k_y$, $k_y \to 1/k_x$ と置換して得られるHの値が流線を示すことになる。

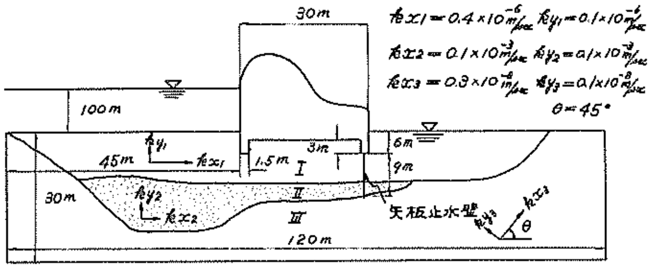

図-2

4．計算例 ； 図-2で示される断面について、流線網を求め、図-3のような結果を得た。詳細については当日発表の予定である。最後に、本実験の数値計算に際し、終始便宜をはかって下さった香川大学計算機センターの皆様に心より感謝の意を表する次第である。

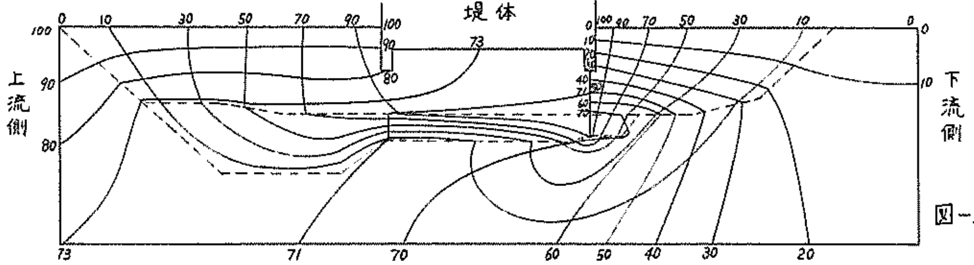

図-3

文献 1) Zienkiewicz, O.C, Mayer, P, Cheung, Y.K.; Solution of Anisotropic Seepage Problems by Finite Elements, Proc. ASCE, EM, Vol.92, No.1, 1966, PP.111~120. 2) Finn, W.D.; Finite Element Analysis of Seepage through Dams, Proc. ASCE, SM, Vol, 93, No,6, 1967 PP41~48 3) Taylor, R.L, Brown, C.B.; Darcy Flow Solution with Free Surface, Proc. ASCE, HY, Vol 93, No.2, 1967 PP.25~33 4) 川本, 駒田, 宮田 ; 堤体および基礎における浸透流の有限要素解析について, 土と基礎, Vol 18, NO.12, 1970, PP.19~26