

徳島大学工学部	正員	工博	小田 英一
同	正員		宇都宮英彦
同	正員		山上 拓男
大阪市役所	正員		○山口 健二

1. まえがき

従来の地盤の振動による堤体の応答解析においては、基礎地盤は一様な振動をなすとし、また、堤体は均質な材料からなり、さらに、堤体をはり出し梁のような単体として扱うことにより解析を進めていた。しかし、本論文においては、最近開発された有限要素法を用い、さらに、電子計算機を駆使することにより、地盤の振動に位相のずれを考え、有限な自由度をもつ堤体の応答解析を行いました。扱う堤体は不均質な弾性体材料で構成され、個々の材料は等方性であるとし、地盤の振動は正弦波形の変位関数で規定しました。

2. 解析手順

よく知られている静的な剛性方程式は

$$[K]\{\delta\} = \{P\} \quad (1)$$

であり、ここに、節点数を n 個とすれば、 $[K]$ は $2n \times 2n$ の剛性マトリックスであり、 $\{\delta\}$ は $2n \times 1$ の節点変位ベクトルであり、 $\{P\}$ は $2n \times 1$ の荷重ベクトルである。

地盤の振動が外力として作用し、強制振動しているときの運動方程式は、静的な剛性方程式(1)に慣性力(質量と加速度の積に負号をつけた力)の項および粘性抵抗(速度に比例し運動をさまたげる方向に作用する力)の項を導入すれば求まり、つぎのように表わされる。

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{P\} \quad (2)$$

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{P\} \quad (2')$$

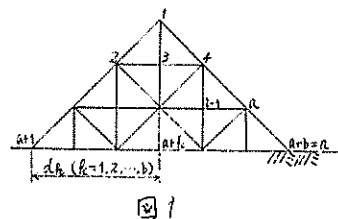
ここに、 $[C]$ は $2n \times 2n$ の減衰マトリックスであり、 $[M]$ は $2n \times 2n$ の集中質量マトリックスであり、 $[M]$ は $2n \times 2n$ の可変の質量マトリックスである。 $[M]$ は三角形要素の質量を各節点に振り分けた要素の質量マトリックスを合成したものであり、 $[M]$ は質量が要素全体に分布(慣性力が分布)しているとして求めた要素の質量マトリックスと合成したものである。

地盤の振動を $u_0(t) = A_0 \sin p_0 t$, $v_0(t) = 0$ と規定すれば、地盤振動の位相のずれは

$$u_{a+k}(t) = u_0(t - \frac{ak}{V_0}) = A_0 \sin p_0 (t - \frac{ak}{V_0}) \quad , \quad v_{a+k}(t) = 0 \quad (3)$$

で表わされる。ここに、 A_0 は外力の半振幅、 p_0 は外力の円振動数、 V_0 は堤体底部の伝播速度、 ak は堤体左端より節点 $a+k$ までの横断距離である。

式(2)(2')の行列表示の運動方程式を解けば、応答振動が求まるのであるが、これを直接解くことは困難であるので、応答変位を式(4)に示すように準静的変位と動的変位に分けて解析を進める。準静的変位(剛)とは外力としての地盤の運動が準静的に(冲る力として)作用することによって生じる変位であり、動的変位(剛)とは準



静的変位による慣性力および粘性抵抗が外力のように作用することによって生じる変位である。

$$\{\delta\} = \{\delta_s + \delta_d\} = \begin{Bmatrix} \bar{y}_{s1} + \bar{y}_{d1} \\ \bar{y}_{s2} + \bar{y}_{d2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{y}_{s1} + \bar{y}_{d1} \\ \bar{y}_{s2} + 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

式(4)において、 $\{\bar{y}_s\}$ および $\{\bar{y}_d\}$ は基礎より上の節点での準静的変位および動の変位であり、 $\{\bar{y}_s\}$ および $\{\bar{y}_d\}$ は基礎の部分の節点での準静的変位および動の変位である。 $\{\bar{y}_d\}$ は式(3)によって定義され、 $\{\bar{y}_{d1}\}$ は動の変位を求めるとき、基礎の部分は *rigid floor* として扱われるので $\{0\}$ となる。

準静的変位 $\{\bar{y}_s\}$ は準静的つり合い方程式

$$[K]\{\delta_s\} = \{P\} \quad \text{すなわち} \quad \begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{y}_{s1} \\ \bar{y}_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix} \quad (5)$$

かう、基礎より上の節点での準静的つり合い方程式

$$[K_u]\{\bar{y}_u\} + [K_b]\{\bar{y}_b\} = \{0\} \quad (6)$$

を解いて求める。動の変位 $\{\bar{y}_d\}$ は動的なつり合い方程式

$$[M]\{\ddot{\delta}_d\} + [C]\{\dot{\delta}_d\} + [K]\{\delta_d\} = -[M]\{\ddot{\delta}_s\} - [C]\{\dot{\delta}_s\} \quad (7)$$

$$[M]\{\ddot{\delta}_d\} + [C]\{\dot{\delta}_d\} + [K]\{\delta_d\} = -[M]\{\ddot{\delta}_s\} - [C]\{\dot{\delta}_s\} \quad (7')$$

を節点マトリックスに分割して、基礎より上の節点での動的なつり合い方程式

$$[M_u]\{\ddot{\bar{y}}_u\} + [C_u]\{\dot{\bar{y}}_u\} + [K_u]\{\bar{y}_u\} = -[M_u]\{\ddot{\bar{y}}_b\} - [C_u]\{\dot{\bar{y}}_b\} - [C_b]\{\dot{\bar{y}}_u\} \quad (8)$$

$$[M_b]\{\ddot{\bar{y}}_b\} + [C_b]\{\dot{\bar{y}}_b\} + [K_b]\{\bar{y}_b\} = -[M_b]\{\ddot{\bar{y}}_u\} - [M_u]\{\ddot{\bar{y}}_u\} - [C_u]\{\dot{\bar{y}}_u\} - [C_b]\{\dot{\bar{y}}_b\} \quad (8')$$

を解いて求めればよいが、式(8)(8')において、右辺の減衰項 $[C_u]\{\dot{\bar{y}}_u\}$ 、 $[C_b]\{\dot{\bar{y}}_b\}$ は動の変位 $\{\bar{y}_u\}$ に与える影響は小さいので、これらを無視して

$$[M_u]\{\ddot{\bar{y}}_u\} + [C_u]\{\dot{\bar{y}}_u\} + [K_u]\{\bar{y}_u\} = -[M_u]\{\ddot{\bar{y}}_b\} \quad (9)$$

$$[M_b]\{\ddot{\bar{y}}_b\} + [C_b]\{\dot{\bar{y}}_b\} + [K_b]\{\bar{y}_b\} = -[M_b]\{\ddot{\bar{y}}_u\} - [M_u]\{\ddot{\bar{y}}_u\} \quad (9')$$

のようにあらためる。式(9),(9')において、減衰マトリックス $[C]$ は定義されているが、減衰の項 $[C_u]\{\dot{\bar{y}}_u\}$ の影響を、減衰のない自由振動の運動方程式

$$[M_u]\{\ddot{y}\} + [K_u]\{y\} = \{0\} \quad \text{すなわち} \quad [K_u]\{y\} = \lambda[M_u]\{y\} \quad (\lambda = \omega^2) \quad (10)$$

$$[M_b]\{\ddot{y}\} + [K_b]\{y\} = \{0\} \quad \text{すなわち} \quad [K_b]\{y\} = \lambda[M_b]\{y\} \quad (\lambda = \omega^2) \quad (10')$$

によって定義される振動形に対して、この減衰マトリックス $[C]$ は直交すると仮定し、さらに、振動形に対する減衰比を予想すれば、この影響を近似することができ、

固有値問題(10)の場合

(I) $[M_u]^{-1/2}$ を計算し、対称行列 $[A] = [M_u]^{-1/2}[K_u][M_u]^{-1/2}$ を求め、対称行列 $[A]$ の固有値問題 $[A]\{x\} = \lambda\{x\}$ をヤコビ法により解いて、直交変換により対角化された行列 $[X]^T[A]\{X\} = [N]$ を求める

(II) 式(10)の固有値の行列 $[N]$ は $[N]$ に等しく、その対角要素の平方根が求める系の固有円振動数であり、振動形の行列 $\{y\}$ は $[M_u]^{-1/2}\{X\}$ で与えられる。

(10')の場合

(I) 対称行列 $[M_b]$ の固有値問題 $[M_b]\{y\} = \lambda\{y\}$ をヤコビ法で解いて、直交変換により対角化された行列 $\{y\}^T[M_b]\{y\} = [T]$ を得る。つぎに、 $[T]^{-1/2}$ を計算し、さらに、 $[N][T]^{-1/2}$ を計算する。

(II) 対称行列 $[A] = ([N][T]^{-1/2})^T[K_b]([N][T]^{-1/2})$ を計算し、対称行列 $[A]$ の固有値問題 $[A]\{x\} = \lambda\{x\}$ をヤコビ法で解き、直交変換により対角化された行列 $\{x\}^T[A]\{x\} = [N]$ を得る。

(III) $[A] = [N]$ であり、 $[N] = \{y\}[T]^{-1/2}\{x\}$ である。

式(10), (11)の解として $2a$ 個の固有円振動 ω_i と $2a \times 2a$ の振動形の行列 $\{Y_i\}$ が求まると、任意の運動は、これらの振動形を適当な割合で重ね合わせたものと考え、 $\{z\}$ と各々の振動形と混じる比率とすると、動的変位 $\{u\}$ は

$$\{u\} = \{Y_i\} \{z\} \quad (11)$$

で表わされる。式(11)の $\{z\}$ は一般に基準座標と呼ばれるものである。

式(11)を式(9), (9')に代入し、左から振動形の行列 $\{Y_i\}$ の転置行列 $\{Y_i\}^T$ を掛けると

$$(\{Y_i\}^T [M] \{Y_i\}) \{z\} + (\{Y_i\}^T [C] \{Y_i\}) \dot{\{z\}} + (\{Y_i\}^T [K] \{Y_i\}) \{z\} = - \{Y_i\}^T [M] \ddot{\{u_0\}} = \{R\} \quad (12)$$

$$(\{Y_i\}^T [M] \{Y_i\}) \ddot{\{z\}} + (\{Y_i\}^T [C] \{Y_i\}) \dot{\{z\}} + (\{Y_i\}^T [K] \{Y_i\}) \{z\} = - \{Y_i\}^T [M] \ddot{\{u_0\}} - \{Y_i\}^T [M] \ddot{\{u_0\}} = \{R\} \quad (12')$$

を得る。式(12), (12')の左辺第1項および第3項の係数行列は

$$\{Y_i\}^T [M] \{Y_i\} = [I] \quad \{Y_i\}^T [K] \{Y_i\} = [N] = [A] \quad (13)$$

$$\{Y_i\}^T [M] \{Y_i\} = [I] \quad \{Y_i\}^T [K] \{Y_i\} = [N] = [A] \quad (13')$$

となる。この性質がよく知られている振動形の直交性である。減衰マトリックス $[C]$ も同様に振動形 $\{Y_i\}$ に対して直交するものとし、その対角要素が $2\omega_i h_i$ (h_i は減衰比) で表わされるとすると、式(12), (12')はつぎに示す式(14)のようにたがいに独立した $2a$ 個の微分方程式に分解される。すなわち、行列表示の運動方程式(9), (9')が独立した式となり、式(9), (9')における減衰項 $[C] \dot{\{u\}}$ の影響が近似されることになる。

$$\ddot{z}_i(t) + 2\omega_i h_i \dot{z}_i(t) + \omega_i^2 z_i(t) = R_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, 2a) \quad (14)$$

式(14)の2階非同次線形微分方程式の解は

$$z_i = \frac{1}{\omega_i \sqrt{1-h_i^2}} \int_0^t e^{-\omega_i h_i(t-\tau)} \sin \omega_i \sqrt{1-h_i^2} (t-\tau) R_i(\tau) d\tau \quad (i=1, 2, \dots, 2a) \quad (15)$$

となり、これを数値計算して、基準座標ベクトル $\{z\}$ を求めれば、動的変位 $\{u\}$ は式(11)より求まる。これまでに求まった準静的変位 $\{u_0\}$, $\{u_1\}$, 動的変位 $\{u_d\}$ を合計すれば、式(4)で表される応答変位が求まる。要素の応力は、 $\{u\}$ を応力変換マトリックスとすれば、 $\sigma = [E] \{u\}$ より計算できる。

3. 計算例

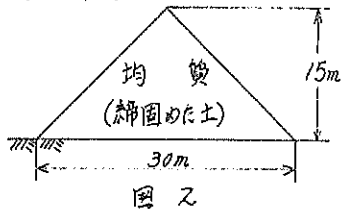


図 2

弾性定数 $E = 57160 \text{ kg/cm}^2$
 ポアソン比 $\nu = 0.45$
 単位体積重量 $\gamma = 2.082 \text{ kg/cm}^3$
 重力加速度 $g = 9.80 \text{ m/sec}^2$

自重による応力分布 (Stress)

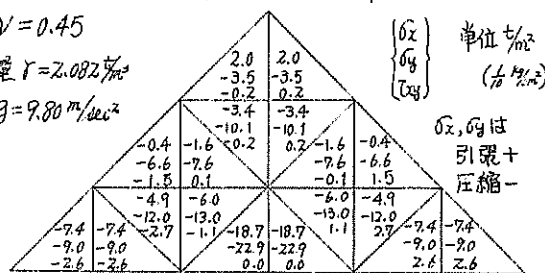


図 3

1 次固有円振動数 $\omega = 45.5 \text{ rad/sec}$

・ 固有振動周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.14 \text{ sec}$

・ 固有振動数 $N = \frac{1}{T} = 7.3 / \text{sec}$

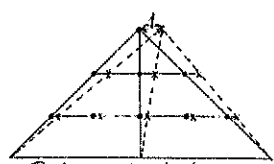


図 4.1 1 次振動モード

$\omega = 77.8 \text{ rad/sec}$
 $T = 0.08 \text{ sec}$
 $N = 12.4 / \text{sec}$

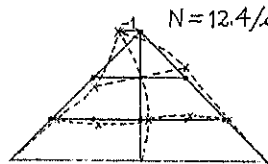


図 4.2 2 次振動モード

$\omega = 88.3 \text{ rad/sec}$
 $T = 0.07 \text{ sec}$
 $N = 14.1 / \text{sec}$

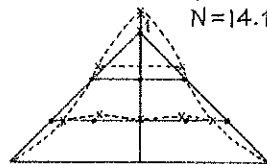


図 4.3 3 次振動モード

図5と同じ堤体に外力として地盤の振動($A_0=15000\mu$, $B=2.094395 \text{ rad/sec}$ ($T_0=3 \text{ sec}$), $V_0=305 \text{ m/sec}$)を与え、減衰比はすべての節点で0.2とした場合の応力分布(Dynamic)

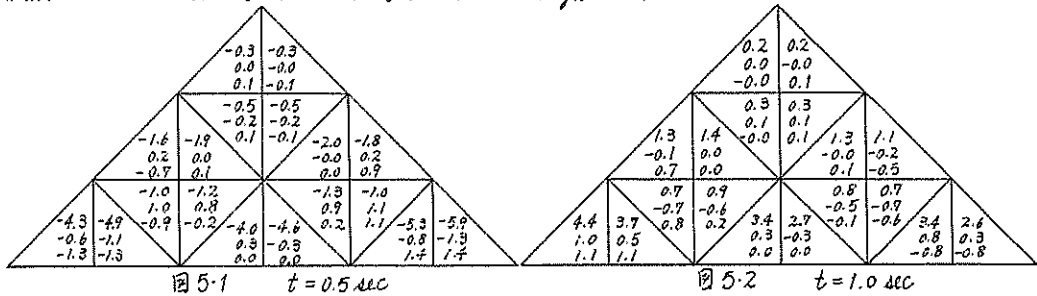
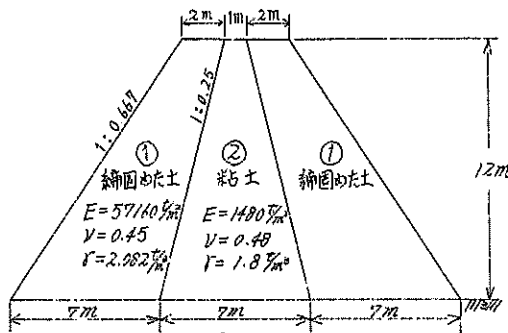
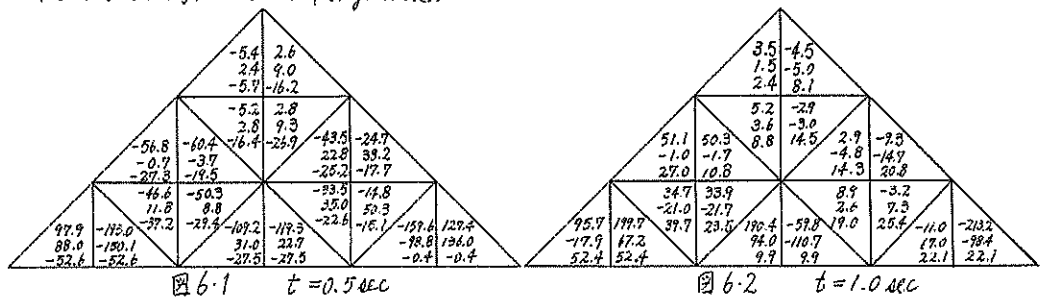


図5および図5と同じ条件で、 $T_0=0.15 \text{ sec}$ すなわち $B=41.887907 \text{ rad/sec}$ (系の固有円振動数に近しい)のみ変えた外力を与えた場合の応力分布(Dynamic.)



4. あとがき

計算例が少ないため、定性的な事に関してさらに解析を重ねていく必要があり、また、本研究においては、地盤の振動を正弦波形の変位関数で規定したが、将来はアナログコンピューター、大型デジタルコンピューターを用いて、実際の地震記録を外力として入力できるプログラムを開発できればと考えます。

5. 参考文献

- 1) O.C.Zienkiewicz, Y.K.Cheung; *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill, 1967
- 2) Mostafa Dityf, Joseph Razja; *Response of Earth Dam to Traveling Seismic Waves*, *Proceeding of A.S.C.E.*, SM2, March, 1969