

広島大学工学部 正員 大河裕
三菱重工業(K.K.) 正員・橋本安之

1. まえがき

従来, プレートガーダーの座屈についてはウェブおよびフランジ部における曲げ座屈せん断座屈あるいはせん断と曲げが連成する座屈などについて数多くの研究がなされ設計上の指針を与えている。しかし曲線板に関する座屈問題の論文は筆者の知るかぎり見当たらない。

そこで筆者らは曲線板における座屈問題解明の第一歩としてウェブのせん断座屈挙動の理論的解析を試みた。本稿は曲線板の補剛材間隔で区切られたウェブを四辺単純支持の曲板とみなし, 線形理論を差分法で解くことによりそのせん断耐力および変形状態を説明し, ついで有限変形理論からたわみ w を有限フーリエ級数において座屈後の挙動を説明しようとするものである。

2. せん断荷重を受ける曲板の理論解析

K. Marguerre¹⁾によると有限変形を考慮した曲板の平衡方程式は次式である。

$$\frac{1}{E} \nabla^4 F = w_{xy}^2 - w_{xx} w_{yy} + \frac{1}{R} w_{xx}, \quad (1)$$

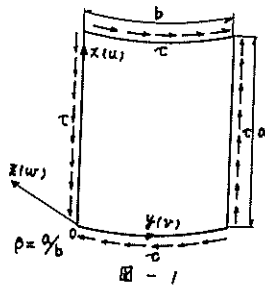
$$D/A \nabla^4 w - F_{yy} w_{xx} - F_{xx} (w_{yy} - 1/R) + 2F_{xy} w_{xy} = 0, \quad (2)$$

安定問題において上式の特異形項を省略し, 次式を得る。

$$\frac{1}{E} \nabla^4 F = \frac{1}{R} w_{xx}, \quad (3)$$

$$D/A \nabla^4 w + \frac{1}{R} F_{xx} - 2\tau_{cr} w_{xy} = 0, \quad (4)$$

- ここで
(1) $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})$
(2) R : 曲率半径
(3) F : 応力関数
(4) τ_{cr} : 座屈荷重



(1) 座屈解析

(3)(4)式は $\nabla^{-4}(\nabla^4 X) = X$ と ∇^{-4} を定義すれば次式のように一つの式となる。

$$\nabla^4 w + (12Z^2/b^4) \nabla^{-4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2k_s \frac{\pi^2}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad (5)$$

ここで $R_s = (b^2 A / \pi^2 D) \tau_{cr}$, $Z = (b^2 / R A) \sqrt{1 - \nu^2}$ とおいた。

曲板を格子状に分割し, 分割点のたわみ w を未知数として, (5)式を書き下せば次の連立方程式を得る。

$$[A]\{w\} + \frac{12Z^2}{b^4} [A^{-1}][B]\{w\} = 2k_s \frac{\pi^2}{b^2} [C]\{w\} \quad (6)$$

マトリックス $[A]$, $[B]$, $[C]$ は連立一次方程式の係数行列で正交マトリックスをなし, $\{w\}$ は内点のたわみ w_{ij} を縦に並べた列ベクトルである。したがって(6)式の固有値 R_s とそれに対応する固有ベクトルが求められれば座屈荷重および座屈時の変形様式が求まる。なお, 本研究では反復法を用いて固有値計算を行った。

(2) 後座屈解析 (平板については文献(2)で解析されている。)

たわみ w を次式のごとく展開できると仮定する。

$$w = h \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (8)$$

(8)式を(1)式に代入し四辺単純支持の境界条件を満足するように応力関数 F を求めると次式となる。

$$F = -\tau_{cr} y + E A \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} - \frac{E A a^2}{R \pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (9)$$

ついで, (9)式を(2)式に代入し Galerkin の方法を用いて次式を得る。

$$\frac{\pi^2}{4} \phi_{rs} \{ (r^2 + \nu s^2)^2 f_{rs} - \frac{2\beta b^2 R}{D} \tau_{cr} \sum_{m=1}^{m+r} \sum_{n=1}^{n+s} \frac{m n r s}{(m^2 - r^2)(n^2 - s^2)} [(-1)^{m+r} - 1][(-1)^{n+s} - 1] f_{mn} - \frac{3}{4} \pi^2 (1 - \nu^2) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \{ (m(s-n) - n(r-m))^2 \times \phi_{r-m, s-n} + (m(n-s) + n(r-m))^2 \phi_{r-m, n-s} - (m(n+s) + n(r-m))^2 \phi_{r-m, n+s} + (m(s-m) + n(m-r))^2 \phi_{m-r, s-n} + (m(n-s) + n(r-m))^2 \phi_{m-r, n-s} - (m(n+s) + n(r-m))^2 \phi_{m-r, n+s} + (m(s-m) + n(m-r))^2 \phi_{m-r, s-n} \} \}$$

$$-n(m-r))^2 \phi_{m-r, n-s} - (m(n+s) - m(m-r))^2 \phi_{m-r, n+s} - (m(s-n) + n(m+r))^2 \phi_{m+r, s-n} - (m(n-s) - n(m+r))^2 \phi_{m+r, n-s} \\ + (m(n+s) - n(m+r))^2 \phi_{m+r, n+s} \} + \frac{E A^2 b^2}{R D} \sum_{m,n} \psi_{mn} f_{mn} m^2 n^2 \{ (1-(-1)^m)(1-(-1)^n) \} \frac{r}{(4m^2-r^2)s} + \frac{s}{(4n^2-s^2)r} \} \\ - \frac{E A^2 b^2}{R D} \sum_{m,n} \{ (1-(-1)^m) \} (1-(-1)^n) \phi_{mn} \frac{r s m^2}{(r^2-m^2)(s^2-n^2)} + \frac{E A^2 b^4}{4 R^2 D} r^2 \psi_{rs} = 0 \quad (10)$$

ここで、 ϕ_{pq} : f_{pq} に関する二次関数 ($p, q < 0$ のとき 0)、 ψ_{pq} : f_{pq} に関する一次関数、 $r, s = 1, 2, 3, \dots$ である。
式(8)ではたわみ w を無限級数で展開したがこれでは実際に解くことは困難なので本研究では $(r, s) = (1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3)$ の 5 項について数値計算を行なった。したがって (10) 式は f_{12} に関する 5 元 3 次連立代数方程式となる。(式が繁雑であるので本稿では省略する。) この連立代数方程式の性質から明らかに $f_{12} = 0$ という根と残りの 2 根が考えられる。この物理的な意味は $f_{12} = 0$ は座屈を生じない場合に对应し、残り 2 根については座屈後一つの荷重状態について 2 つの変形様式があることを示す。本研究ではこの 2 つの変形様式を各々 Case (1)、Case (2) と名付ける。なお、5 元 3 次連立代数方程式の解法として Newton-Raphson の反復法を用いて数値計算を行なった。

3. 結果および考察

詳細については講演当日スライドにて説明するのでここでは概要を記す。

(1) 座屈荷重

(3), (4) 式の解法として従来のたわみ w を有限フーリエ展開し固有値計算をする方法 (Batdorf, Stein 等) と本研究で行なった (6) 式の差分法と 2 通りあるがその両者の結果を比較するとあまり曲率の大きくない曲板については両者がかなり一致している。したがって後者は前者に比べてたわみ変形様式を仮定する必要がないのでかなり簡潔で有用な方法である。(図-2 参照)

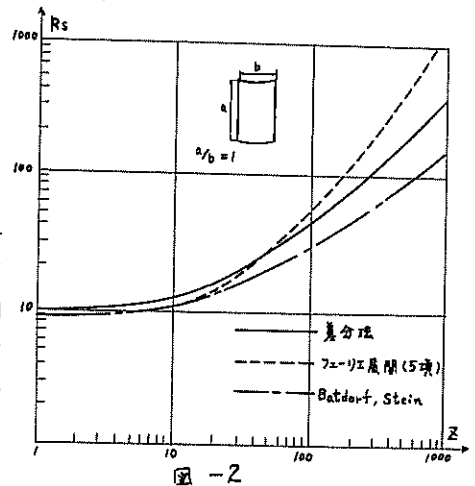


図-2

(2) 座屈後形

(6) 式の固有ベクトル $|w|$ を曲率の異なる曲板についてみると、曲率の異なる曲板ほどその座屈後形が多く現れることがわかる。

(3) 後座屈挙動

曲板のせん断座屈後においては理論的に曲板の凹側と凸側にたわみ変形様式があり、そのたわみ量は前者の方が大きくとくに座屈直後において急激に現れる。さうにこれは曲率の大きい曲板ほど顕著である。

4. あとがき

本研究ではとくにせん断荷重による座屈挙動を扱ったが今後さらに他の荷重状態についての挙動が明らかにされれば曲線荷としての座屈挙動がある程度把握できるものと思われる。

参考文献 (1) K. Marguerre,

"Zur Theorie der Gekrümmten Platte Grosser Formänderung"

pp 93~101

(2) 小西一郎, 白石取人, 渡辺英一,

"腹板の耐力に関する一考察" 土木学会論文集 第136号 昭41.12

pp 15~23