

徳島大学工学部 正員 星 治雄

〃 〃 児嶋弘行

〃 〃 沢田 勉

1. まえがき

有限要素法を用いて板の弾性座屈問題を解く研究としては, Hartz¹⁾らの論文があり, 簡単な例題が解かれている。本研究では, プレートガーダーの腹板の弾性座屈を解析するために有限要素法を適用し, 腹板を, 板とよりの複合構造物とみなし, はり要素のねじり剛度を考慮して, 腹板が純曲げ, および, 純せん断をうけた場合の弾性座屈を解析した。

2. 解析の概要

図-1 に示すように, 板が横荷重, および, 面内荷重によって曲げをうける場合には, ある要素 e を取り出して考える。

要素 e の各節点には, 3個の変位成分があり, 節点 i については次のようになる。

$$\delta_i = [\theta_{xi} \ \theta_{yi} \ w_i]^T$$

したがって, 要素 e の変位 $\{\delta\}^e$ は

$$\{\delta\}^e = [\delta_i \ \delta_j \ \delta_k \ \delta_l]^T \quad (1)$$

同様に, 節点 i の節点力 F_i , および, 要素 e の節点力 $\{F\}^e$ は次のようになる。

$$F_i = [T_{xi} \ T_{yi} \ P_i]^T$$

$$\{F\}^e = [F_i \ F_j \ F_k \ F_l]^T \quad (2)$$

面内力がない一般の板の曲げの場合には, 要素 e の変位 $\{\delta\}^e$ と節点力 $\{F\}^e$ の間には次の関係がある。

$$\{F\}^e = [R]^e \{\delta\}^e \quad (3)$$

ここで, $[R]^e$ は要素 e の剛性行列 (Stiffness Matrix) である。つぎに, 板要素に存在する面内力の影響を考える。この場合, 面内力は変位 $\{\delta\}^e$ に影響されないのであるとすると, 問題を線形化して取り扱うことができ, 面内力による影響は式(3)に重ね合わせればよい。ゆえに, 要素 e の節点力 $\{F\}^e$ と変位 $\{\delta\}^e$ の間には式(3)の代りに, 次の式が成立立つ。

$$\{F\}^e = ([R]^e + [R_s]^e) \{\delta\}^e \quad (4)$$

ここで, $[R_s]^e$ は要素 e に存在する面内力の影響を表わす行列で安定係数行列 (Stability Coefficient Matrix) とよばれる。以上で, 要素 e についての節点力と変位の関係がわかったので, これらの要素の集合としての板の節点力 $\{F\}$ と変位 $\{\delta\}$ の関係は次のようになる。

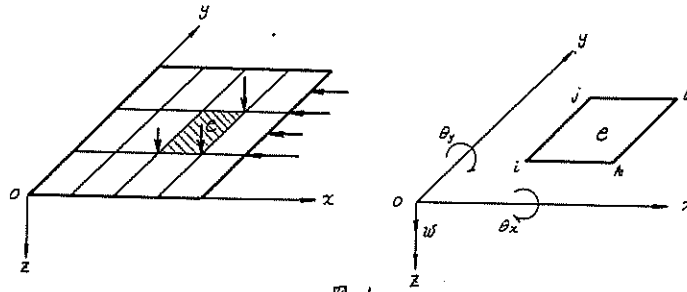


図-1

$$([K] + [K_s])\{\delta\} = \{F\} \quad (5)$$

ここで、 $[K]$ 、および $[K_s]$ は板全体としての剛性行列と安定係数行列を表わす。板の各節点における節点力は節点外力 $\{R\}$ に等しいことから次の釣合方程式が成立する。

$$([K] + [K_s])\{\delta\} = \{R\} \quad (6)$$

板の弾性安定問題の場合には、節点外力 $\{R\}$ は $\{0\}$ であるから、式(6)は次式のようになる。

$$([K] + [K_s])\{\delta\} = \{0\} \quad (7)$$

上式において、行列 $[K_s]$ は面内力に関連しているが、その面内力がある係数 λ に比例するものとする、式(7)は次式のように変形できる。

$$([K] + \lambda[K_s])\{\delta\} = \{0\} \quad (8)$$

この場合、安定係数行列 $[K_s]$ の符号は面内力の向きによって変わるから $\lambda = -\lambda$ として、 $[K_s]$ の成分をこれに対応するように変更すると式(8)は次のようになる。

$$([K] - \lambda[K_s])\{\delta\} = \{0\} \quad (9)$$

両辺に $[K_s]^{-1}$ を乗ずると

$$([K_s]^{-1}[K] - \lambda[I])\{\delta\} = \{0\} \quad (10)$$

上式の固有値問題を解く解法には種々あるが、一般に、板の弾性座屈問題では固有値 λ の最小値とそれに対応する固有ベクトルのみが必要となるので累乗法を用いることにすると、式(10)は次のように変形される。

$$([K_s]^{-1}[K] - \frac{1}{\lambda}[I])\{\delta\} = \{0\} \quad (11)$$

式(11)を累乗法により解くと、固有値 λ より座屈係数が、それに対応する固有ベクトルより座屈形が求まり、板の座屈問題が解析される。

以上の理論にもとづき、電子計算機 TOSBAC-3400 を対象とした解析プログラムを作成した。

そのプログラムのブロックダイアグラムを示すと図-2 のようである。

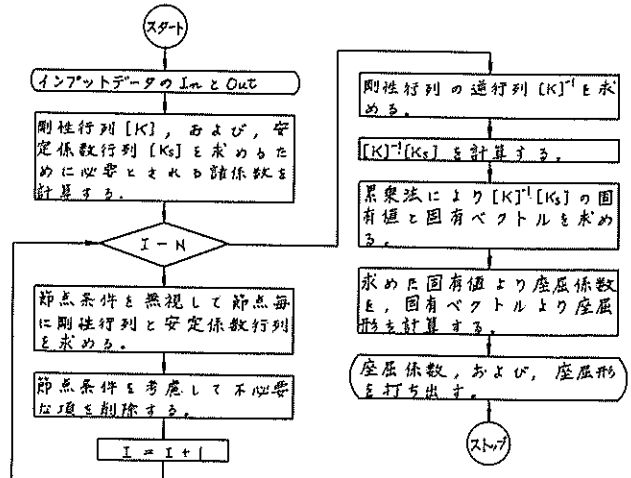


図-2

3. プレートガーダーの腹板座屈の解析

図-3 に示すようなプレートガーダーにおいて、上、下フランジと二つの鉛直補剛材によって囲まれた腹板の部分に注目し、腹板は、鉛直補剛材のある辺で単純支持、上、下フランジでは、フランジのねじれ剛度を考慮して、弾性回転支持とする。腹板の弾性座屈を解析するために、パラメータとして、腹板の縦横比 $\alpha = l_x/l_y$ 、および、フランジが腹板に与える拘束の度合を表わすものとして γ を

次式のようにとる。

$$\gamma = C_F / l_y D_x$$

ここで、 C_F : フランジのねじり剛度、 D_x : 腹板の x 方向の曲げ剛度である。

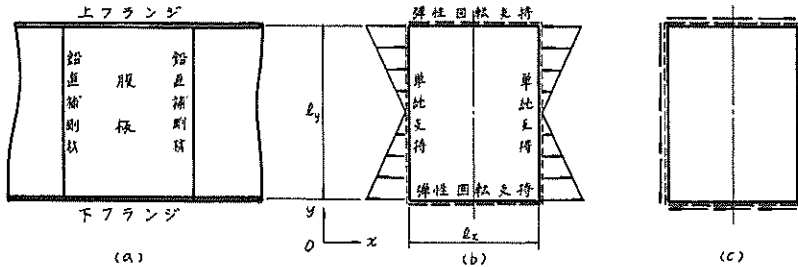


図-3

座屈応力 σ_{cr} は一般に次式のように表わされる。

$$\sigma_{cr} = K_{cr} \cdot \pi^2 D_x / l_y^2 t$$

ここで、 t : 腹板の厚さ、 K_{cr} : 座屈係数である。

以上の各係数を用いて、(1) 腹板が純曲げをうけた場合、(2) 純せん断をうけた場合の弾性座屈について解析した。

(1) 腹板が純曲げをうけた場合

図-3 (b) に示すように腹板が純曲げをうけた場合、 α 、 γ をパラメータとして、 K_{cr} を表わすと、図-4 のようになる。この図において、腹板のフランジ部における支持条件は、 $\gamma=0$ で単純支持、 $\gamma=\infty$ で固定支持であり、実際のプレートガーダーではその中間になる。

また、腹板の座屈形の概略を図-5 に示す。

この図において、 x は上フランジから最大たわみが生ずる点までの距離であり、種々の α 、 γ に対する x の値を表-1 に示す。

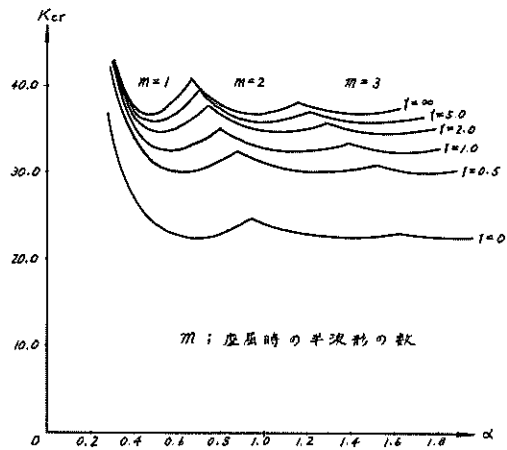


図-4

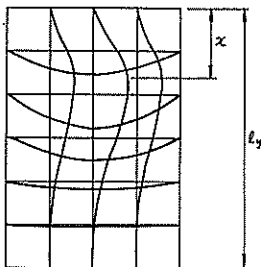


図-5

表-1 x/l_y の値

$\gamma \backslash \alpha$	0	0.5	1.0	2.0	5.0	∞
0.5	0.242	0.239	0.239	0.238	0.237	0.236
0.6	0.240	0.237	0.237	0.236	0.236	0.235
0.7	0.238	0.236	0.235	0.235	0.235	0.234

(2) 腹板が純せん断をうけた場合

図-3(に)に示すように腹板が純せん断をうけた場合、 α 、 γ と K_{cr} の関係を図示すると図-6のようになる。また、この場合の座屈形の概略を図-7に示す。

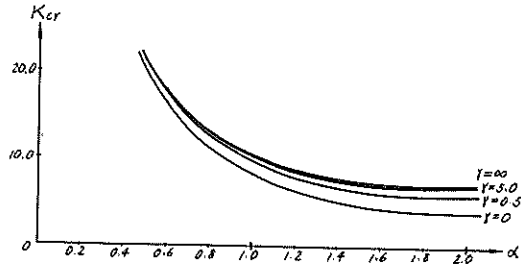


図-6

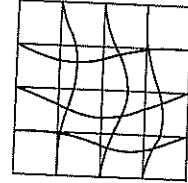


図-7

4. 考察

以上の結果より次のようなことがわかる。

(1) 腹板が純曲げをうけた場合、図-4より $m=1$ と $m=2$ の交点が求まる。実際のプレートガーダーでは $\gamma \geq 2$ の場合が多いため、この交点の α は0.7前後となる。したがって、腹板が鉛直補剛材の間に1つの半波形に座屈するためには、腹板の縦横比 α を約0.7以下としなければならない。

(2) 腹板が純曲げ、および、純せん断をうけた場合とも、 γ が5.0以上では、 K_{cr} はフランジが固定の時の K_{cr} に近い値をとる。ゆえに、 $\gamma \geq 5$ では、腹板がフランジすべてで固定されていると考えておさしつかえない。

(3) 腹板が純曲げをうけた場合、最大たわみが生ずる点の位置は、 α 、 γ によって多少異なるが、その点の上フランジからの距離は、腹板高さの約0.23～0.24倍になる。ところで、プレートガーダーの腹板に水平補剛材を入れる場合、補剛材が最大たわみ点を通るようにすれば最も効果的と思われる。ゆえに、水平補剛材の位置は上フランジから、腹板高さの0.23～0.24倍の位置に設けるのがよいと推定できる。

参考文献

- 1) K.K.Kapur, B.J.Hartz; "Stability of thin plates using the finite element method"
Proc. A.S.C.E. EM2. P.P.177～195
- 2) O.C.Zienkiewicz, Y.K.Cheung, 吉識雅雄訳; マトリックス有限要素法