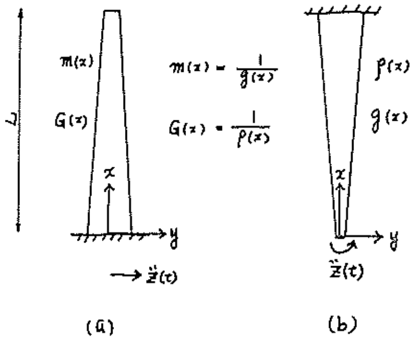
1-1　2　/ 大森和実

1−1　動的共役梁に関する研究

○ 名古屋大学大学院　学生　大森和実
山口大学　正員　中川建治

Ⅰ〕序

片持梁の横たわみ振動に関する微分方程式を，x方向（材軸方向）に関する階差方程式によって表現して，2階連立常微分方程式を導く。これを行列の積によって表現して，行列の固有値と固有モードの関係を用いて特殊な方程式へ導いて動的共役梁を定義する。階差の間隔を0へ近づけることによって階差方程式は元の微分方程式へ還元されるので，階差方程式によって導入された動的共役梁の関係は微分方程式においても成立する。



図－1

Ⅱ〕動的共役梁

元の片持梁を煙突のように曲げ振動を伴うものとして，高さL，質量分布$m(x)$，曲げ剛さ分布$G(x)$をもつものとする。この片持梁に対する「動的共役梁」としてつぎのような梁を定義する（図−1参照）。「質量分布$\rho(x)$は元の梁の曲げ剛さの逆数$1/G(x)$であり，曲げ剛さ分布$g(x)$は元の梁の質量分布の逆数$1/m(x)$とする梁で，自由端と埋込端を元の梁とは反対にしたもの。」このような定義によると，元の梁の共役梁の共役梁は元の梁であり，ディメンションを考慮しない限りいづれが共役梁であるとしてもよい。この相互に共役の関係にある梁についてはつぎのような特殊な関係が成立する。

1° 自由振動周期（固有値）は両方の梁で，それぞれの次数で一致する。

2° 一方の梁の変位モードは，他方の梁の同じ次数の振動モードの曲げモーメントモードに対応する。

3° 一方の梁の埋込端に地震加速度$\ddot{z}(t)$を作用させて変位応答と曲げモーメント応答を求めて$y(x,t)$ $M(x,t)$とする。他方の梁の自由端に地震加速度$\ddot{z}(t)$をモーメント外力として作用させて水平変位応答$\eta(x,t)$を求める。この場合に$M(x,t)=\eta(x,t)$が成立する。

Ⅲ〕証明

図−1・(a)に示す片持梁の曲げ変形による自由振動の方程式は減衰力を無視すると

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(G\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)=0 \qquad \text{------------} \quad (1)$$

となる。境界条件を考慮してx方向の階差によって展開すると，つぎのような運動方程式となる。hはx方向の階差間隔である。階差によってn自由度系とみなす。

$$[m]\{\ddot{y}\} + \frac{1}{h^4}[S]\{y\} = \{0\} \quad \cdots\cdots (2)$$

$$\left.\begin{aligned}
&[m] = \begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_n \end{bmatrix}, \quad [S] = [D_1]^2[B]^T[G][D_1]^2[B] \\
&[B] = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ 0 & & & \ddots & 1 \end{bmatrix}, \quad [G] = \begin{bmatrix} G_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G_{n-1} \end{bmatrix}, \quad [\sqrt{G}] = \begin{bmatrix} \sqrt{G_0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{G_{n-1}} \end{bmatrix} \\
&[\sqrt{m}] = \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{m_n} \end{bmatrix} \times D_2^{-1} \quad [D_1] = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad [D_2] = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \cdots (3)$$

自由振動の固有値$[\lambda]$とモード$[\Phi]$は式(4)を満足する。変形すると正規直交ベクトル(モード)$[U]$によって式(5)によって表現される。さらに式(3)の関係を代入すると$[C]$が定義されて式(6)が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
[\Phi]^T[S][\Phi] &= [\lambda] \\
[\Phi]^T[m][\Phi] &= [E]
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (4)$$

$$\left.\begin{aligned}
&[U] = [\sqrt{m}][\Phi] \\
&[U]^T[\sqrt{m}]^{-1}[S][\sqrt{m}]^{-1}[U] = [\lambda] \\
&[U]^T[U] = E
\end{aligned}\right\} \cdots (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
&[C] = [\sqrt{G}][D_1][B][\sqrt{m}]^{-1} \\
&[U]^T[C]^T[C][U] = [\lambda] \\
&[U]^T[U] = E
\end{aligned}\right\} \cdots (6)$$

さて、行列の固有値とベクトルに関しては、C^TCの固有値と$C \cdot C^T$の固有値が等しいという関係がある。C^TCのベクトルUと$C \cdot C^T$のベクトルVは一般には異なる。Vは直交行列であるから式(7)が成立する。式(7)の$[C]$へ式(6)を代入して整理すると式(8)となる。

$$\begin{aligned}
[U]^T[C]^T[C][U] &= [U]^T[C]^T[V][V]^T[C][U] \\
&= [V]^T[C][C]^T[V] = [\lambda] \quad \cdots\cdots (7)
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&[V]^T[\sqrt{G}][D_1][B][m]^{-1}[D_2]^2[B]^T[D_1][\sqrt{G}][V] = [\lambda] \\
&[V]^T[V] = E
\end{aligned}\right\} \cdots (8)$$

式(5)と式(8)を対比すると、II]で定義した互に共役な梁の固有値問題であることが分る。さらに、変位ベクトル$\{y\}$と曲げモーメントベクトル$\{M\}$との関係は式(9)で表わされる。これを式(2)へ代入して$\{y\}$を消去すると式(10)のような振動方程式を得る。これは共役梁の自由振動方程式で、曲げモーメントモード$\{M\}$が共役梁の見かけ上の変位モードである。詳しい証明は省略する。

$$\{M\} = \frac{-1}{h^2}[G][D_1]^2[B]\{y\} \quad \cdots\cdots (9)$$

$$[G]^{-1}\{\ddot{M}\} + \frac{1}{h^4}[D_1]^2[B][m]^{-1}[D_2]^2[B]^T\{M\} = \{0\} \quad \cdots (10)$$

IV] 計算例

計算例は、徳山ソーダK・Kの高さ90mの鉄筋コンクリート製煙突を対象にした。階差法によって振動方程式を作成すると固有値が一致することは証明されるので、n自由度系として歪みエネルギー法によって振動方程式を導き、固有値とモード、および地震動応答の一致性を検討した。

6自由度系($n=6$)として計算すると、第1固有値の誤差は約0.5%、EL.CENTROの地震応答に関してはそれぞれ10%程度の誤差で変位と曲げモーメント応答が求められた。

詳しくは講演当日発表する。