SUMTによる構造物の最適設計法に関する研究

愛媛大学工学部　正員　大久保 禎二

1. まえがき

一般土木構造物の非線型な最適設計問題を解く有力な方法として、設計変数の影響係数および線型計画法を用いる方法[1]の他に、SUMT（無制限最小化反復法）により解く方法、および Geometric Programming により解く方法等が考えられる。本研究は、上記のうち、SUMTの"Interior point 法"による最適設計法について、その概要および土木構造物の最適設計に適用した場合の計算結果等についてのべるものである。

2. SUMTの概要

SUMTは、最適問題の制約条件式群および目的関数を一つの無制限最小化関数におきかえ、この関数の最小化を行なうことにより、制約条件すべてを満足する最適解を得る方法であり、実行可能領域内から最適解を求める方法を、"Interior point 法"実行不可能領域から最適解を求める方法を、"Exterior point 法"という。このうち、Interior point 法の無制限最小化関数は次のようにして求めることが出来る。

1). 無制限最小化関数の導入

いま、$G_i(X) \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, m)$　　m：条件式の数

の制約条件のもとで、$f(X)$ を最小とする最適問題（A）を考える。

ここに、$G_i(X)$ は設計変数 X に関する非線型な制約条件式

　　$f(X)$ は設計変数 X に関する非線型な目的関数

この最適問題（A）が点 X^* で局所的最小値をとるものとし、その近傍では、完全に制約条件を満足しているものとすると、X^* の近傍において、$G_i(X) > 0$，$(i = 1, \cdots, m)$ であるような点 X が存在する。また、最適問題（A）のラグランジュ関数 $L(X, U)$ を考え、(X^*, U^*) の近傍点 $\{X(r), U(r)\}$ に於て（r は微少量とする）局所的最小点をとるものとすると、二次の十分条件より

$$G_i(X) > 0, \quad U_i G_i(X) = r > 0, \quad U_i \geq 0, \quad (i = 1, \cdots, m) \tag{1}$$

$$\nabla f(X) - \sum_{i=1}^{m} U_i \nabla G_i(X) = 0 \tag{2}$$

また、すべての $i \in B^*$ $(B^* = \{i \mid U_i^* > 0\})$ に対して　$y^T \nabla G_i\{X(r)\} = 0$ であるような y に対して

$$y^T\left(\nabla^2 f - \sum_{i \in B^*} U_i \nabla^2 G_i\right) y > 0 \quad \text{となる。} \tag{3}$$

(1)式を U_i について解き、(2)式に代入すると次式を得る，

$$\nabla f\{X(r)\} - \sum_{i=1}^{m} \frac{r}{G_i\{X(r)\}} \nabla G_i\{X(r)\} = 0 \tag{4}$$

(4)式は、次の関数

$$L(X, r) = f(X) - r \sum_{i=1}^{m} \ln G_i(X) \tag{5}$$

の勾配が $X(r)$ 点において 0 となることを示しており、$X(r)$ が $L(X, r)$ の局所的無制限最小点であるための一次の必要条件を満足していることがわかる。また、関数 $L(X, r)$ の二次の偏微係数のマトリックス

$$\nabla^2 L(X, r) = \nabla^2 f - \sum_{i=1}^{m} \frac{r}{G_i} \nabla^2 G_i + \sum_{i=1}^{m} \nabla G_i \frac{r}{G_i^2} \nabla^T G_i \tag{6}$$

も　$y^T \nabla G_i(X(r)) = 0 \quad (i \in B^*)$　であるようなすべての y に対して

$$y^T \nabla^2 L(X(r), r) y > 0$$

となる。したがって　$\nabla^2 L(X(r), r)$　は、$X(r)$ が　$L(X, r)$　の局所的無制限最小点であるための二次の十分条件を満足する正定マトリックスであることがわかる。

上記の関数　$L(X, r)$　もＳＵＭＴの無制限最小化関数と呼ぶこととすると、無制限最小化関数 $L(X, r)$ が点 $X(r)$　において、局所的無制限最小値をもつための一次の必要条件および二次の十分条件は、最適問題（A）において制限条件を満足する局所的最小点 X^*　において保持する一次の必要条件および、二次の十分条件と同一であることがわかる。また、r が非常に小さな場合は、無制限最小化関数 $L(X, r)$　の局所的無制限最小点は、最適問題（A）の局所的制限最小点と一致する。

上の展開において、もし、$u_i = \lambda_i^2, \ (i = 1, \cdots, m)$　　$\lambda_i G_i = r > 0, \ (i = 1, \cdots, m)$

とすれば、先に求めた　$L(X, r)$　とは異なった次のような無制限最小化関数　$P(X, r)$　を得る。

$$P(X, r) = f(X) + r^2 \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{G_i(X)} \qquad (7)$$

このように、最適問題（A）を無制限最小化関数の最小化におきかえ、実行可能領域内から r をしだいに０に近づけながら最適解を求めてゆく方法をＳＵＭＴの“*Interior point* 法”という。

2)　*Interior point* 法　による最小化の手法

1)で求めた無制限最小化関数　$L(X, r)$，$P(X, r)$　は、一般的に次のような関数として表わすことができる。

$$U(X, Y) \equiv f(X) + S(Y) \cdot I(X) \qquad (8)$$

ここに、$I(X)$　は　$R^0 = \{X \mid G_i(X) > 0, \ i = 1, \cdots, m\}$　で連続であり、少なくとも一つの i に対して $G_i(X_B) = 0$　となるような X_B に収斂するならば、$\lim_{k \to \infty} I(X^k) = +\infty$　となるような関数、

また、$S(r)$　は、$r_1 > r_2 > 0$　で　$S(r_1) > S(r_2) > 0$ であり、もし、$\{r_k\}$ が $\lim_{k \to \infty} r_k = 0$　であるならば、$\lim_{k \to \infty} S(r_k) = 0$　となる変数 r のスカーラー値の関数とする。

この無制限最小化関数 $U(X, r)$　の最小点は次のように求めることができる。すなわち、

(1)　まず無制限最小化関数 $U(X, r_1) = f(X) + S(r_1) \cdot I(X)$　を決定する。ここに r_1　は正数である。また、初期値 X^0　として　$X^0 \in R^0$　をとる。

(2)　つぎに、X^0 より出発して実行可能領域　$R^0 = \{X \mid G_i(X) \geq 0, \ i = 1, \cdots, m\}$　における関数 U の局所的最小点 $X(r_1)$　を求める。$X(r_1)$ は領域 R^0 内においては無制限である。

もし、$X(r_1)$ が実行可能領域の境界上もしくは外へ出た場合は、$U = +\infty$　となり、$X(r_1)$　が局所的無制限最小点であるという仮定と矛盾する。

(3)　つぎに、$X(r_1)$ より出発して　$U(X_1, r_2)$　の局所的最小値を求わる。ここに $r_1 > r_2 > 0$ である。

(4)　r_k　を減少させながら上記の計算をくり返し、$U(X, r_k)$　の局所的最小値を求める。

(5)　r_k　が十分小さい場合は、X は最適問題（A）の局所的制限最小点と一致する。

上記の無制限最小化関数 $\bar{U}(X, r)$　の最小化の過程で、X が実行可能領域の境界線上に来た場合には $G_i(X) = 0$、したがって　$S(r) \cdot I(X) \to \infty$　となり、$U(X, r)$　は制約条件の境界線上に達することはあり得ず、常に実行可能領域内にあることになる。したがって　$U(X, r)$　の　$S(r) \cdot I(X)$ 項は、制約条件 $G_i(X)$　の境界を越えることなく実行可能領域の内側において、U 関数を最小にするために、目的関数 $f(X)$　に加えられた罰金項とみなすことができる。

3. 無制限最小化関数の最小点の決定法

前節でのべた局所的最小点を求めていく過程で、各 r_k に対して、$U(X, r_k)$ の局所的最小点 $X(r_k)$ を求めることが必要となる。この方法として、

(1) 関数の微係数を用いない方法（*Search Technique*, *Conjugate Direction* 法 等）

(2) 関数の一次の微係数を用いる方法（最急勾配法, *Fletcher - Reeves* 法 等）

(3) 関数の二次の微係数を用いる方法（一般化したニュートン法）

等の適用が考えられるが、一般的な $U(X, r_k)$ 関数の最小化法としては、*Conjugate Direction* の性質を利用したＤＦＰ法が最も有効な方法と思われるので、次にＤＦＰ法についてその計算手法を簡単にのべることとする。

1) ＤＦＰ法

この方法は、関数の一次の微係数（$\nabla U(X^i, r) = g^i$）を用いて、次式より二次の微係数マトリックスの逆マトリックス（H^{i+1}）を求め、

$$H^{i+1} = H^i + \frac{(\delta^i)(\delta^i)^T}{(\delta^i)^T \Delta g^i} - \frac{H^i(\Delta g^i)(\Delta g^i)^T H^i}{(\Delta g^i)^T H^i \Delta g^i} \tag{9}$$

これを用いて、

$$U(X^{i+2}, r) = \min_{\alpha} U((X^{i+1} - \alpha H^{i+1} g^{i+1}), r) \tag{10}$$

となる X^{i+2} を求めてゆく方法である。

ここに、$\Delta g^i = \nabla U(X^{i+1}, r) - \nabla U(X^i, r)$, $\delta^i = -\alpha^i H^i g^i$ である。

2) α の決定法

1)のＤＦＰ法で最小点を求めていく過程において、$X^{i+2} = X^{i+1} + \alpha S^{i+1}$ とし、S^{i+1} にそって $U(X^{i+2}, r)$ を最小にするような正の α の値を求めることが必要となる。

この α を決定する方法としては、張り出し法、*Fibonacci Search* 法, ニュートンラフソン法等があるが、説明は略する。

4. 初期値の決定および実行可能性の判定

２－２)でのべたごとく、"*Interior point* 法" により $U(X, r)$ を最小化する場合、初期値 X^0 は実行可能領域内になければならない。すなわち、X^0 は最適問題（A）の一つの実行可能解でなければならない。ところが、実際の最適問題においてはそのような実行可能解をたやすく得ることができない場合が多い。しかし、このような場合にも "*Interior point* 法" を利用することによって実行可能解を自動的に容易に求めることができる。

いま、仮定した初期値 X^0 が制約条件式 $G_i(X) \geq 0$, $(i = 1, \cdots, m)$ のうち

満足している条件の集合を　$T = \{t \mid G_t(X) > 0,\ 1 \leq t \leq m\}$

満足していない条件の集合を　$S = \{s \mid G_s(X) \leq 0,\ 1 \leq s \leq m\}$

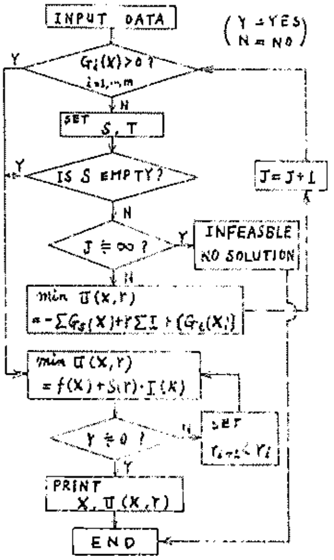
とすると、すべての制約条件を満足する実行可能解を得るためには、これまでに満足している制約条件 $G_t(X) > 0$ を満足しつつ、$\sum_{s \in S} G_s(X)$ の値を最大にする〔または、$-\sum_{s \in S} G_s(X)$ を最小にする〕ようにすればよい。すなわち、

$$U(X, r_k) = -\sum_{s \in S} G_s(X) + r_k \sum_{t \in T} I_t(G_t(X)) \tag{11}$$

を、r_k を減少させつつ最小にする X を求めればよいことになる。

上記の $U(X, r_k)$ は、これまでにのべてきた無制限最小化関数と全く同様にして最小化することができ

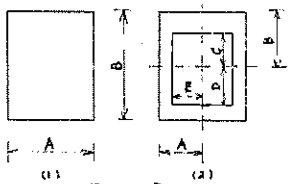
き、実行可能解(X)を求めることができる。また、上式の最小化の過程で、S集合の条件の中に $G_s(X)>0$ の条件が生じた場合は、その条件をS集合からT集合へ移し、そのたびごとに $U(X,r_k)$ を修正して行けばよい。したがって、最適問題(A)が実行可能な場合は、集合Sは最終的に空集合となり、すべての条件を満足する一つの実行可能解を得ることができる。しかし、最適問題(A)が実行不可能な場合は、集合Sを最終的に空集合とすることができない。したがって、上記の $U(X,r_k)$ を最小化することにより、単に実行可能な初期値を得ることのみならず、最適問題(A)の実行可能性をも判定することができるわけである。　以上のべてきたSUMTの"Interior point 法"の概括的な流れ図を示すと第1図のようになる。



第1図

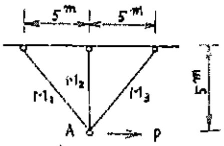
5　計算例

1)　第2図-(1)に示す長方形断面が、圧縮力 15^{ton} 曲げモーメント $1.5^{t\text{-}m}$ を受ける場合。　この例では、設計変数はA, Bの2個であり許容応力度として $\sigma_{ca}=1300^{(kg/cm^2)}$, $\sigma_{ta}=1400^{(kg/cm^2)}$ また、A, Bの最小許容寸法をともに 0.8^{cm} とした。入力データーとして非常に極端な場合を考え $A=B=0.1^{cm}$ とし計算を始めても、簡単に実行可能な初期値 $A=9.9761^{cm}$ $B=9.7051^{cm}$ を得、最終的に $r=0.0002$ で、$A=0.80^{cm}$ $B=37.5^{cm}$ を得た。この結果は同じく $A=B=0.1^{cm}$ とし影響係数とLPを用いて最適設計を行なった結果と一致している。



第2図

2)　第2図-(2)に示す箱形断面が、圧縮力 15^{ton}、曲げモーメント $2^{t\text{-}m}$ を受ける場合、　この例では設計変数として、A, B, C, D, E の5個を選び、設計条件として、許容応力度 $\sigma_{ca}=\sigma_{ta}=1000^{(kg/cm^2)}$ のみならず、板厚に関して鋼道示第43条の条件および各設計変数の最小寸法の条件をも考慮し合計10個の条件式を考えている。入力データーとして、$A=1^{cm}$, $B=2^{cm}$, $C=1^{cm}$, $D=1^{cm}$ $E=0.5^{cm}$ を与えても実行可能な初期値、$A=5.405^{cm}$, $B=6.758^{cm}$, $C=1.050^{cm}$, $D=1.050^{cm}$, $E=0.123^{cm}$ 断面積 $SA=145.8^{cm^2}$ を得た、70回のくり返し計算後、$r=0.0039$ で $A=2.85^{cm}$, $B=8.90^{cm}$, $C=4.07^{cm}$, $D=5.82^{cm}$, $E=2.05^{cm}$ を得、断面積 SA は 61.0^{cm^2} まで減少した、ただし、この結果はさらに改良が予想される。



第3図

3)　第3図に示すトラスが、水平荷重 $P=200^{ton}$ を受ける場合のトラスの最小容積を求めた。この例では、設計変数として部材の断面積を考え、設計条件として、部材応力（細長比、板厚に関する3条件も含む）および格点変位を考慮している。（参考文献(1)参照）格点AのX, Y方向の撓みの制限を 5^{cm} とした場合、最小容積をもつトラスは、各部材の許容応力度の条件が支配的な条件となり、初期値として $M_1=210^{cm^2}$, $M_2=110^{cm^2}$, $M_3=200^{cm^2}$ を与えた場合　33回のくり返し計算後、$r=0.118$ で $M_1=101.8^{cm^2}$, $M_2=0.004^{cm^2}$ $M_3=122.6^{cm^2}$ を得た。この結果は、影響係数とLPにより求めた最適結果 $M_1=101.0^{cm^2}$ $M_2=0^{cm^2}$, $M_3=122.3^{cm^2}$ とほとんど一致している。（参考文献(1)参照）なお、上記の計算例の詳細な比較等については、当日発表することとする。

(1) 例えば；大久保"トラス構造物の最適設計法に関する研究"土木学会論文集　第177号　1970年5月