平面滑節トラスの変形の幾何学的逐次計算法

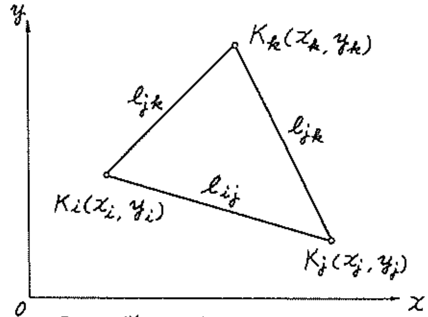
阿南高専　正員　神田　睦

1. 要旨

多くの三角形トラスによって組立てられている一般の平面滑節トラスにおいて，部材応力が何らかの方法により得られた場合の各節点の変位の計算方法を幾何学的に検討したものである．三角形の各頂点をなすトラス節点間の座標の関係式を誘導し，さらに応力による部材伸縮量，および，節点移動量を加味したときの座標の関係式を誘導し，それらの式を使用した逐次計算法を示すものである．三角形トラスを計算の基礎としている関係上，三角形の頂点以外に節点を有するトラス，たとえばKトラスなどについては計算することが出来ない．全節点の移動量を全て幾何学的関係で求める意味において，ウイリオの変形図による図式解法に対し，数値的解法ということができる．数値計算例に示したトラスでは，図式解法に比較して，余り多くの労力を必要としないし，計算精度は使用する有効桁数に応じて上げる事ができる．

2. 単位三角形トラスの節点の座標関係式

任意の直角座標x，yを定め，外力の作用しない状態で任意の単位三角形トラスが図－1のようであるとする．ただし，図中，Kは節点を，lは部材長を，x，および，yは節点の座標値をそれぞれ suffix をつけて示すものとする．3個の節点K_i，K_j，K_kの座標値には，つぎの関係がある．



図－1　単位３角形トラス

$$(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 = l_{ik}^2 \qquad (1)$$

$$(x_j - x_k)^2 + (y_k - y_j)^2 = l_{jk}^2 \qquad (2)$$

式(1)，および，式(2)の辺々を相引き変形すれば，つぎのようになる．

$$2y_k(y_j - y_i) = -2x_k(x_j - x_i) + (x_j^2 - x_i^2) + (y_j^2 - y_i^2) + (l_{ik}^2 - l_{jk}^2) \qquad (3)$$

a) $y_i \neq y_j$，$x_i \neq x_j$ のとき，

式(3)の両辺を$2(y_j - y_i) \neq 0$で除し，y_kを求め，それを式(1)に代入し，$4(y_j - y_i)^2$を乗じて，変形すれば，

$$4l_{ij}^2(x_k - x_i)^2 - 4(x_j - x_i)(l_{ij}^2 + l_{ik}^2 - l_{jk}^2)(x_k - x_i) + (l_{ij}^2 + l_{ik}^2 - l_{jk}^2)^2 - 4\{l_{ij}^2 - (x_j - x_i)^2\}l_{ik}^2 = 0 \qquad (4)$$

b) $y_i \neq y_j$，$x_i = x_j$ のとき，

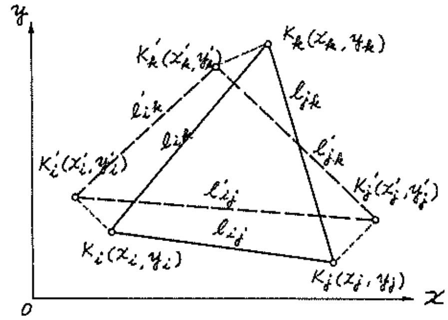
式(3)はつぎのようになる．

$$-2y_k(y_j - y_i) + (y_j^2 - y_i^2) + (l_{ik}^2 - l_{jk}^2) = 0 \qquad (5)$$

c) $y_i = y_j$，$x_i \neq x_j$ のとき，

式(3)はつぎのようになる

$$-2x_k(x_j - x_i) + (x_j^2 - x_i^2) + (l_{ik}^2 - l_{jk}^2) = 0 \qquad (6)$$



図－2　変位後の単位三角形

d) $y_i = y_j$, $x_i = x_j$ のときは点 j と i は一致して，三角形でなくなるので考慮しない．

以上の式 (4) ～ (6) が単位三角形トラスの 3 節点の座標値の関係式である．

3．変形後の単位三角形トラスの節点の座標関係式

図－2 に示すように，もとの単位三角形 $K_i K_j K_k$ が変位して三角形 $K'_i K'_j K'_k$ になったとする．ここで，部材長，および，座標値の変化量を，それぞれ Δ で示すものとする．

すなわち，

$$\left.\begin{array}{l} l'_{ij} = l_{ij} + \Delta l_{ij},\ l'_{ik} = l_{ik} + \Delta l_{ik},\ l'_{jk} = l_{jk} + \Delta l_{jk},\ x'_i = x_i + \Delta x_i,\ x'_j = x_j + \Delta x_j \\ x'_k = x_k + \Delta x_k,\quad y'_i = y_i + \Delta y_k,\quad y'_j = y_j + \Delta y_j,\quad y'_k = y_k + \Delta y_k \end{array}\right\} \quad (7)$$

また，以後の計算においては，変化量 Δx，Δy，および，Δl は，もとの量に比べ微小なものとして取り扱うものとする．

a) $y_i \neq y_j$，$x_i \neq x_j$ のとき，

変形後の座標関係式は式 (4) の各項にダッシュをつけたものになる．その各項へ，式 (7) の関係を代入し，高次の微小量を無視し，変形すれば，結局つぎのようになる．

$$\begin{aligned} \Delta x_k = \Big(\big\{ & -2 l_{ij} \cdot \Delta l_{ij} (x_k - x_i)^2 + 2(x_j - x_i)(x_k - x_i)(l_{ij} \cdot \Delta l_{ij} + l_{ik} \cdot \Delta l_{ik} - l_{jk} \cdot \Delta l_{jk}) \\ & + (x_k - x_i)(l_{ij}^2 + l_{ik}^2 - l_{jk}^2)(\Delta x_j - \Delta x_i) - (l_{ij}^2 + l_{ik}^2 - l_{jk}^2)(l_{ij} \cdot \Delta l_{ij} + l_{ik} \cdot \Delta l_{ik} - l_{jk} \cdot \Delta l_{jk}) \\ & + 2 l_{ij}^2 l_{ik} \cdot \Delta l_{ik} + 2 l_{ij} l_{ik}^2 \Delta l_{ij} - 2(x_j - x_i)^2 l_{ik} \cdot \Delta l_{ik} - 2(x_j - x_i) l_{ik}^2 (\Delta x_j - \Delta x_i) \big\} \Big/ \\ & \big\{ 2 l_{ij}^2 (x_k - x_i) - (x_j - x_i)(l_{ij}^2 + l_{ik}^2 - l_{jk}^2) \big\} \Big) + \Delta x_i \end{aligned} \quad (8)$$

この式 (8) で，部材変化 Δl_{ij}，Δl_{ik}，Δl_{ik} ならびに他の 2 節点の水平変位 Δx_i，Δx_j が何らかの方法により求められておれば，節点 K_k における水平変位 Δx_k が求められる．鉛直変位 Δy_k はつぎの方法による．$y_k \neq y_i$（または $y_k \neq y_j$，このときは以下の i を j に替えればよい．）として，つぎの式 (9) より高次の微小量を無視して，式 (10) で水平変位 Δy_k を得る．

$$(x'_k - x'_i)^2 + (y'_k - y'_i)^2 = l'^2_{ik}$$

$$\Delta y_k = \Delta y_i + \frac{1}{y_k - y_i} \left\{ -(x_k - x_i)(\Delta x_k - \Delta x_i) + l_{ik} \cdot \Delta l_{ik} \right\} \quad (10)$$

b) $y_i \neq y_j$，$x_i = x_j$ のとき，

この場合は，式 (5) の各項にダッシュをつけた式へ式 (7) の関係を代入し，高次の微小量を無視すれば，鉛直変位がつぎのように求まる．

$$\Delta y_k = \left\{ (y_j \cdot \Delta y_j - y_i \cdot \Delta y_i) + (l_{ik} \cdot \Delta l_{ik} - l_{jk} \Delta l_{jk}) - (\Delta y_j - \Delta y_i) \cdot y_k \right\} / (y_j - y_i) \quad (11)$$

この場合は $x_k \neq x_i$ でなければ三点が一直線上にくるから，$x_k \neq x_i$ として水平変位 Δx_k は，式 (9) より，つぎのようになる．

$$\Delta x_k = -x_i + \frac{1}{x_k - x_i} \left\{ -(y_k - y_i)(\Delta y_k - \Delta y_i) + l_{ik} \Delta l_{ik} \right\} \quad (12)$$

c) $y_i = y_j$，$x_i \neq x_j$ のとき，

この場合は，b) の場合の式 (11)，および，(12) で x と y とを互いに入れ替えた式となる．すなわち，

$$\Delta x_k = \left\{ (x_j \cdot \Delta x_j - x_i \cdot \Delta x_i) + (l_{ik} \cdot \Delta l_{ik} - l_{jk} \cdot \Delta l_{jk}) - (\Delta x_j - \Delta x_i) \cdot x_k \right\} / (x_j - x_i) \quad (13)$$

$$\Delta y_k = -\Delta y_i + \frac{1}{y_k - y_i} \left\{ -(x_k - x_i)(\Delta x_k - \Delta x_i) + l_{ik} \Delta l_{ik} \right\} \quad (14)$$

となる．

d) $y_i = y_j$，$x_i = x_j$ のときは，2 点が一致する故考慮しない．

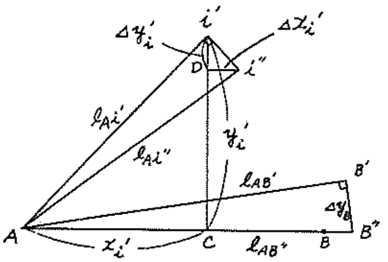
4. トラスの節点の変位

前節で得た式(8)〜(12) を用いて実際のトラスの変位を求める方法について述べる。まず，原点を適当に定め，荷重載荷前のトラスの全節点の座標を求めておく。また別に各部材の応力を知り，部材毎に伸縮量Δl を求める。そして，式(8)〜(12)を用いて単位三角形を順に取り出し，逐次計算をして行けばよい訳である。しかし，そのためには最初の単位三角形に於て，2個の節点の変位が既知でなければならない。一般的にその様な場合は稀であるので，最初に回転支承を含む三角形を選び出す。支承の変位は $\Delta x = \Delta y = 0$ である故，残る節点の一個の変位を適当に仮定し既知のものとして取り扱い，残る節点の変位を式(8)〜(12)で求める。つぎに，最初の単位三角形に隣接する三角形の内，未知節点が一個の三角形を選び，式(8)〜(12) で計算し，以後同様に単位三角形を逐次選びながら，他の支承における変位を得る。この方法によれば一般に他の支承での変位の条件を満足しないので，その修正をする必要がある。なお，最初の単位三角形における仮定した変位は，三角形の節点と支承とを結ぶ部材の伸縮量と独立して定められたものではいけないので，一例としては変位を仮定する節点の変位の方向を部材の伸縮方向と仮定し，Δl をもとに，Δx，Δy を定めるのがよい。また前述の修正量の計算においては，単位三角形の逐次計算によってトラス全体の節点の相対変位が得られているから，回転支承を中心とし回転する事により各節点の補正量が得られる。

5. 変位の補正量

今トラスの回転支承をA，他の支承（固定でも，移動でもよい）をBとする。逐次計算によって求めたものにはダッシュを，さらに補正した正しいものにはダッシュを2個つけて示すものとする。

図−3は，トラスの中間の節点K_iと，移動端Bとを取り出して示したものとする。この場合は，補正のための回転の中心はAであり，補正回転は，B'がAB上に来る様にすればよい。Δy_Bは微小であるから，補正回転による節点K_i'，および，B'の移動はAK_i'，および，AB'に対して直角方向であるとする。$\triangle AB'B''$ と $\triangle AK_i'K_i''$ とは相似であるから，



図−3　途中の節点の補正値と他支承の変位との関係

$$K_i'K_i'' = \frac{l_{Ai'}}{l_{AB'}} \times \Delta y_B \qquad (15)$$

となる。さらに，補正量を$\Delta y_i'$，および，$\Delta x_i'$とすれば，

$$\Delta y_i' = K_i'K_i'' \times \cos\theta_i' = \frac{l_{Ai'}}{l_{AB'}} \times \Delta y_B \times \frac{x_i'}{l_{Ai'}} = \frac{x_i'}{l_{AB'}} \times \Delta y_B \qquad (16)$$

$$\Delta x_i' = K_i'K_i'' \times \sin\theta_i' = \frac{l_{Ai'}}{l_{AB}} \times \Delta y_B \times \frac{y_i'}{l_{Ai'}} = \frac{y_i'}{l_{AB'}} \times \Delta y_B \qquad (17)$$

となる。ここで，高次の微小量を無視すれば，結局つぎのように補正量が得られる。

$$\Delta y_i' = \frac{\Delta y_B}{l_{AB}} \times x_i \qquad (18)$$

$$\Delta x_i' = \frac{\Delta y_B}{l_{AB}} \times y_i \qquad (19)$$

式(18)，および，(19)が補正量であるが，これはΔy_Bが定まれば，計算は簡単である。

以上により，結局節点 i の全変形量をそれぞれ δ_{xi}，および，δ_{yi} で表わせば次式となる。

$$\delta_{yi} = \Delta y_i + \Delta y_i' \quad (20)\ ; \qquad \delta_{xi} = \Delta x_i + \Delta x_i' \quad (21)$$

6. 数値計算例

図－4のトラスについての計算例を示す。

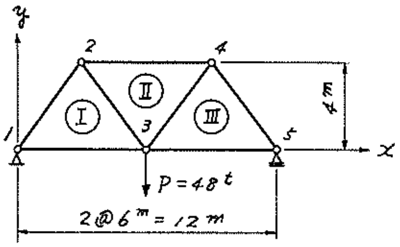
断面積は全て同一で $F = 50\,\mathrm{cm}^2$，弾性係数は $E = 2.1\times10^6\,\mathrm{kg/cm^2}$，部材長は $l_{12} = l_{23} = l_{34} = l_{45} = 5\,\mathrm{m}$，$l_{13} = l_{24} = l_{35} = 6\,\mathrm{m}$ とする。荷重を $P = 48^t$ とすれば，部材応力はそれぞれ，

$S_{12} = S_{45} = -30^t$，$S_{13} = S_{35} = 18^t$，$S_{23} = S_{34} = 30^t$，$S_{24} = -36^t$

となるから，部材伸縮量はそれぞれつぎのようになる。

$\Delta l_{12} = \Delta l_{45} = -1.429\times10^{-3}\,\mathrm{m}$，$\Delta l_{13} = \Delta l_{35} = 1.029\times10^{-3}\,\mathrm{m}$

$\Delta l_{23} = \Delta l_{34} = 1.429\times10^{-3}\,\mathrm{m}$，$\Delta l_{24} = -2.057\times10^{-3}\,\mathrm{m}$



図－4 数値計算例のトラス

a) 相対変位

(i) 三角形①において，節点3の鉛直変位を0と仮定する。節点1，3の変位はそれぞれ，

$\Delta x_1 = 0$，$\Delta y_1 = 0$，$\Delta x_3 = 1.029\times10^{-3}\,\mathrm{m}$，$\Delta y_3 = 0$ となる。この場合，$y_i = y_j$，$x_i \neq x_j$ だから，

式(13)より，$\Delta x_2 = \{6\times1.029\times10^{-3} + 5(-1.429\times10^{-3}) - 5\times1.429\times10^{-3} - 1.029\times10^{-3}\times3\}/6 = -1.867\times10^{-3}\,\mathrm{m}$

式(14)より，$\Delta y_2 = -0 + \{-3(-1.867\times10^{-3}) - 5\times1.429\times10^{-3}\}/4 = -0.386\times10^{-3}\,\mathrm{m}$ となる。

(ii) 三角形Ⓘにおいて，$y_i \neq y_j$，$x_i \neq x_j$ だから，式(8)より，

$$\begin{aligned}\Delta x_4 = -1.867\times10^{-3} + \Big[\Big\{&-2\times5\times1.429\times10^{-3}\times6^2 + 2\times3\times6\{5\times1.429\times10^{-3} + 6(-2.057\times10^{-3}) - 5\times1.429\times10^{-3}\} + 6(5^2+6^2-5^2)\\ &\times(1.029+1.867)\times10^{-3} - (5^2+6^2-5^2)\{5\times1.429\times10^{-3} + 6(-2.057\times10^{-3}) - 5\times1.429\times10^{-3}\} + 2\times6\times5^2\times(-2.057)\times10^{-3}\\ &+ 2\times6^2\times5\times1.429\times10^{-3} - 2\times3^2\times6(-2.057\times10^{-3}) - 2\times3\times6^2(1.029+1.867)\times10^{-3}\Big\}\Big/\{2\times5^2\times6 - 3(5^2+6^2-5^2)\}\Big] = -3.924\times10^{-3}\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

$$\Delta y_4 = \left[\{-3\times(-3.924-1.029)\times10^{-3} + 5\times(1.429\times10^{-3})\}/(4-0)\right] + 0 = 5.501\times10^{-3}\,\mathrm{m}$$

(iii) 三角形Ⓘについて，(ii)と同様な計算により，$\Delta x_5 = 2.058\times10^{-3}\,\mathrm{m}$，$\Delta y_5 = 11.774\times10^{-3}\,\mathrm{m}$ となる。

b) 補正量。式(18)，(19)による補正量は $\Delta y_B/l_{AB} = 11.774\times10^{-3}/12 = 0.9812\times10^{-3}\,\mathrm{m}$ は各々共通であるから，簡単に求まりつぎのようになる。

$\Delta' x_2 = 3.925\times10^{-3}\,\mathrm{m}$，$\Delta' y_2 = -2.944\times10^{-3}$，$\Delta' x_3 = 0$，$\Delta' y_3 = -5.887\times10^{-3}$

$\Delta' x_4 = 3.925\times10^{-3}\,\mathrm{m}$，$\Delta' y_4 = -8.831\times10^{-3}\,\mathrm{m}$，$\Delta' x_5 = 0$，$\Delta' y_5 = -11.774\times10^{-3}\,\mathrm{m}$

c) 各節点の最終変位

式(20)，(21)によって，各節点の変位はつぎのようになる。

$\delta_{x1} = \delta_{y1} = 0$，$\delta_{x2} = 2.058\times10^{-3}\,\mathrm{m}$，$\delta_{y2} = -3.330\times10^{-3}\,\mathrm{m}$，$\delta_{x3} = 1.029\times10^{-3}\,\mathrm{m}$

$\delta_{y3} = -5.887\times10^{-3}\,\mathrm{m}$，$\delta_{x4} = 0\,\mathrm{m}$，$\delta_{y4} = -3.330\times10^{-3}\,\mathrm{m}$，$\delta_{x5} = 2.058\times10^{-3}\,\mathrm{m}$，$\delta_{y5} = 0$

となり，仮想仕事による方法により求めた変位と一致する。

7. 結言

本法の特徴は簡単な四則演算だけでよく，弾性荷重による方法[1]，J. Dundurs の複素数による方法[2]，児嶋氏の行列式[3] による方法などに比べ数学的知識の少ない者でも解き得る点に特色がある。

8. 参考文献

1)，2)略，3)「平面滑節トラスの変形の逐次計算法について」児嶋弘行，第17回中四国土木学会