

振動変形法によるゲルバー梁の動的解析について

徳島大学工学部 正会員 星 治雄
 “ “ “ 思 嶋 弘 行
 “ “ “ “ 平 尾 繁

1. はじめに

本研究は、静的解析における変形法と同様に、電子計算機と利用して動的解析を行うのに有効な振動変形法に注目し、平面構造物の各種の材端条件に応じた単一部材に対する振動変形法の基本式と誘導し、これらの基本式を用いて一般的な平面構造物の動的解析を行う場合の解析方法について簡単に述べ、ついで、この解析方法を梁構造物へ適用し、若干の初期データをもとに、一次、二次、三次、……、必要な次数までの、自由振動時における、梁構造物の固有振動数、固有振動周期および振動変形が自動的に求まるような梁構造物の動的解析プログラムを完成し、これを用いて、図-3に示すような曾江谷橋ゲルバー桁橋に対する解析結果を示したものである。

2. 平面構造物の単一部材に対する振動変形法の基本式

図-1のような、 x, y 面内にある単一部材 ij の材端力、材端モーメントおよび変形量の各ベクトルの正方向がすべて図の矢印の方向と一致するものとすれば、曲げに対する自由振動時の、各種の材端条件に応じた振動変形法の基本式はそれぞれつぎのようになる。

1) 両端剛節部材に対して

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_{xi} &= a\delta x_i - b\delta x_j + c\delta y_i - d\delta y_j - e\theta_i - f\theta_j \\ \bar{R}_{yi} &= c\delta x_i - d\delta x_j + g\delta y_i - h\delta y_j + i\theta_i + j\theta_j \\ m_{ij} &= -e\delta x_i + f\delta x_j + i\delta y_i - j\delta y_j + k\theta_i + l\theta_j \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

2) i 端剛節, j 端滑節部材に対して

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_{xi} &= a'\delta x_i - b'\delta x_j + c'\delta y_i - d'\delta y_j - e'\theta_i \\ \bar{R}_{yi} &= c'\delta x_i - d'\delta x_j + g'\delta y_i - h'\delta y_j + i'\theta_i \\ m_{ij} &= -e'\delta x_i + f'\delta x_j + i'\delta y_i - j'\delta y_j + k'\theta_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

3) i 端滑節, j 端剛節部材に対して

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_{xi} &= a''\delta x_i - b''\delta x_j + c''\delta y_i - d''\delta y_j - f'\theta_j \\ \bar{R}_{yi} &= c''\delta x_i - d''\delta x_j + g'\delta y_i - h'\delta y_j + j'\theta_j \\ m_{ij} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

4) 両端滑節部材に対して

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_{xi} &= a'''\delta x_i - b'''\delta x_j + c'''\delta y_i - d'''\delta y_j \\ \bar{R}_{yi} &= c'''\delta x_i - d'''\delta x_j + g'\delta y_i - h'\delta y_j \\ m_{ij} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、 $A = EI\phi^2/(1 - \phi C)$, $B = A/\phi$, $D = B/\phi$, $A' = EI\phi/(CS - \phi C)$, $B' = A'/\phi$, $D' = B'/\phi$ とおくと、

$$\begin{aligned} a &= A \cdot (\phi C + CS) \cdot \sin^2 \phi, & b &= A \cdot (\phi + S) \cdot \sin^2 \phi, & c &= -A \cdot (\phi C + CS) \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi \\ d &= -A \cdot (\phi + S) \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi, & e &= B \cdot (\phi S) \cdot \sin \phi, & f &= B \cdot (CS - C) \cdot \sin \phi, & g &= A \cdot (\phi C + CS) \cdot \cos^2 \phi \\ h &= A \cdot (\phi + S) \cdot \cos^2 \phi, & i &= B \cdot (\phi S) \cdot \cos \phi, & j &= B \cdot (CS - C) \cdot \cos \phi, & k &= D \cdot (CS - \phi C), & l &= D \cdot (\phi - S) \\ a' &= A' \cdot 2\phi C \cdot \sin^2 \phi, & b' &= A' \cdot (\phi + C) \cdot \sin^2 \phi, & c' &= A' \cdot 2\phi C \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi, & d' &= -A' \cdot (\phi + C) \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi \\ e' &= B' \cdot (\phi C + CS) \cdot \sin \phi, & g' &= A' \cdot 2\phi C \cdot \cos^2 \phi, & h' &= A' \cdot (\phi + C) \cdot \cos^2 \phi, & i' &= (\phi C + CS) \cdot \cos \phi \\ f' &= B' \cdot (\phi + S) \cdot \sin \phi, & j' &= B' \cdot (\phi + S) \cdot \cos \phi, & k' &= D' \cdot 2\phi S \end{aligned}$$

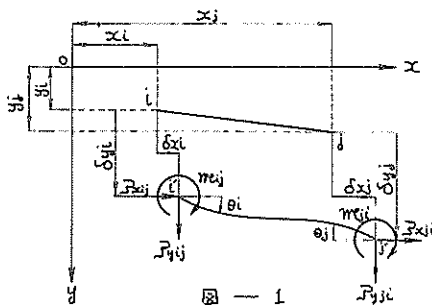


図 - 1

$$\begin{aligned} a' &= A' \cdot (1 + \mathcal{C}) \cdot \sin^2 \varphi, \quad b' = b'', \quad c' = -A' \cdot (1 + \mathcal{C}) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi, \quad d' = d'', \quad f' = f'', \quad h' = h'', \quad j' = j'' \\ g' &= A' \cdot (1 + \mathcal{C}) \cdot \cos^2 \varphi, \quad \text{同様に, } A'' = EI \phi^2 / 2GS \text{ とおく} \\ a'' &= A'' \cdot (\mathcal{C} - \mathcal{S}) \cdot \sin^2 \varphi, \quad b'' = A'' \cdot (\mathcal{C} - \mathcal{S}) \cdot \sin \varphi, \quad c'' = -A'' \cdot (\mathcal{C} - \mathcal{S}) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi, \quad d'' = -A'' \cdot (\mathcal{C} - \mathcal{S}) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \\ g'' &= A'' \cdot (\mathcal{C} - \mathcal{S}) \cdot \cos^2 \varphi, \quad h'' = A'' \cdot (\mathcal{C} - \mathcal{S}) \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$

また、以上において、 $\phi = \sqrt{EI} \omega$, $\mathcal{C} = \sinh \phi l$, $\mathcal{S} = \cosh \phi l$, $S = \sin \phi l$, $C = \cos \phi l$,

$$\cos \alpha = (x_j - x_i) / l, \quad \sin \alpha = (y_j - y_i) / l \text{ である。}$$

3. 基本式の一般的な平面棒構造物の動的解析に対する適用方法

静的解析における変形法の場合と同様に、自由振動時における各節点の力およびモーメントの釣合方程式は、式(1)、～、式(4)を用いて、つぎの式(5)のようになる。

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0 \quad (5)$$

これらの釣合方程式を全節点について立てれば、節点変形量を未知数とした同次の多元連立一次方程式が得られる。したがって、これらの連立一次方程式が有意解をもつためには、静的解析における stiffness matrix に相当する係数行列の determinant が 0 となることが必要である。このようにして得られる振動数方程式は ω (円振動数) の高次の超越函数を含んだ式となり、これを解析的に解くことは不可能であるから、このような場合には、種々の ω の値に対する係数行列の determinant, $D(\omega)$ を計算し、 $\omega - D(\omega)$ 曲線を描き、解となる ω の値と見出す必要がある。

つぎに、振動波形が必要な場合には、先に求めた ω に対して各節点における変形量のある一般分が単位量だけ変位したと仮定した場合の各節点の相対的な節点変形量を求め、これらの値を、自由振動に対する曲げの微分方程式の一般解として得られる変形曲線と節点変形量を未知数として表わした式に代入することによって各部材の振動波形が得られる。

また、節点に集中質量 M_i が作用する場合には、集中質量自身の回転による慣性モーメントを無視すれば、式(5)に相当する節点における力およびモーメントの釣合方程式はつぎの式(6)のように表わされ、 δx_i , δy_i の係数に $-\omega^2 M_i$ が加算されるだけで、あとは集中質量が作用しない場合と全く同様に取り扱い扱うことができる。

$$\sum F_{xi} - \omega^2 M_i \cdot \delta x_i = 0, \quad \sum F_{yi} - \omega^2 M_i \cdot \delta y_i = 0, \quad \sum M = 0 \quad (6)$$

以上のように、本研究の対象とした自由振動の場合については、上述のような解析過程をプログラムしておけば、平面棒構造物の固有振動数、固有振動周期および振動波形を比較的容易に求めることができるが、強制振動とか減衰の項を考慮する場合に於て、このような振動変形法による平面棒構造物の動的解析もかなり複雑なものとなってくる。

4. 深構造物の単一部材に対する基本式

深構造物の曲げに対する自由振動時の単一部材に対する振動変形法の基本式は、先示した式(1)～式(4)において、 $\sin \varphi = 0$, $\delta x = 0$ とおくことによりつぎのように表わされる。

1) 両端剛節部材に対して

$$\left. \begin{aligned} F_{yi} &= g \delta y_i - h \delta y_i + i \theta_i + j \theta_j \\ M_{ij} &= i \delta y_i - j \delta y_j + h \theta_i + l \theta_j \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

2) i 端剛節, j 端滑節部材に対して

$$\left. \begin{aligned} F_{yi} &= g' \delta y_i - h' \delta y_j + i' \theta_i \\ M_{ij} &= i' \delta y_i - j' \delta y_j + h' \theta_i \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

3) i 端滑節, j 端剛節部材に対して

$$F_{yi} = g' \delta y_i - h' \delta y_j + j' \theta_j, \quad M_{ij} = 0 \quad (9)$$

4) 両端滑節部材に対して

$$\delta y_i = g'' \delta y_i - h'' \delta y_j, \quad m_{ij} = 0 \quad (10)$$

以上の式(7)~(10)における各係数, $g, h, i, \dots, g'', h''$ は, それぞれ, 式(1)~(4)の対応した各係数の $\cos^2 \varphi = 1$, $\cos \varphi = 1$ ($x_j - x_i > 0$), または, $\cos \varphi = -1$ ($x_j - x_i < 0$) とおいたものと一致する。

5. 梁構造物の単一部材に対する振動変形曲線

梁構造物の各種の材端条件に於いた単一部材に対する自由振動時の振動変形曲線の方程式は, 2.で述べたように曲げに対する自由振動時の微分方程式の一般解, $y = C_1 \sin \phi x + C_2 \cos \phi x + C_3 \sinh \phi x + C_4 \cosh \phi x$ に, 材端条件を用いて, 節変形量を未知数としたような形でえられる。

1) 両端剛結部材に対して

$$y(x) = \{ (\Theta C + \mathcal{C} S) \cdot \sin \phi x + (\mathcal{C} C - \Theta S - 1) \cdot \cos \phi x - (\Theta C + \mathcal{C} S) \cdot \sinh \phi x + (\mathcal{C} C + \Theta S - 1) \cdot \cosh \phi x \} \delta y_i / 2X \\ + \{ (-\Theta - S) \cdot \sin \phi x + (\mathcal{C} - C) \cdot \cos \phi x + (\Theta + S) \cdot \sinh \phi x + (C - \mathcal{C}) \cdot \cosh \phi x \} \delta y_j / 2X \\ + \{ (\mathcal{C} C + \Theta S - 1) \cdot \sin \phi x + (\Theta C - \mathcal{C} S) \cdot \cos \phi x + (\mathcal{C} C - \Theta S - 1) \cdot \sinh \phi x - (\Theta C - \mathcal{C} S) \cdot \cosh \phi x \} \theta_i / 2\phi X \\ + \{ (\mathcal{C} - C) \cdot \sin \phi x + (S - \Theta) \cdot \cos \phi x - (\mathcal{C} - C) \cdot \sinh \phi x + (\Theta - S) \cdot \cosh \phi x \} \theta_j / 2\phi X \quad (11)$$

2) i 端剛結, j 端滑節部材に対して

$$y(x) = \{ (-\mathcal{C} C) \cdot \sin \phi x + (\mathcal{C} S) \cdot \cos \phi x + (\mathcal{C} C) \cdot \sinh \phi x + (-\Theta C) \cdot \cosh \phi x \} \delta y_i / Y \\ + \{ (\mathcal{C} + C) \cdot \sin \phi x + (-\Theta - S) \cdot \cos \phi x + (-\mathcal{C} - C) \cdot \sinh \phi x + (\Theta + S) \cdot \cosh \phi x \} \delta y_j / 2Y \\ + \{ (-\Theta C) \cdot \sin \phi x + (\Theta S) \cdot \cos \phi x + (\mathcal{C} S) \cdot \sinh \phi x + (-\Theta S) \cdot \cosh \phi x \} \theta_i / \phi Y \quad (12)$$

3) i 端滑節, j 端剛結部材に対して

$$y(x) = \{ (-\mathcal{C} C - \Theta S - 1) \cdot \sin \phi x + (\mathcal{C} S - \Theta C) \cdot \cos \phi x + (\mathcal{C} C - \Theta S + 1) \cdot \sinh \phi x + (\mathcal{C} S - \Theta C) \cdot \cosh \phi x \} \delta y_i / 2Y \\ + \{ (\mathcal{C}) \cdot \sin \phi x + (-C) \cdot \sinh \phi x \} \delta y_j / Y \\ + \{ (-\Theta) \cdot \sin \phi x + (S) \cdot \sinh \phi x \} \theta_j / \phi Y \quad (13)$$

4) 両端滑節部材に対して

$$y(x) = \{ \{ (-\Theta C) \cdot \sin \phi x + (\mathcal{C} S) \cdot \cos \phi x + (-\mathcal{C} S) \cdot \sinh \phi x + (\Theta S) \cdot \cosh \phi x \} \delta y_i + \{ (\Theta) \cdot \sin \phi x + (S) \cdot \sinh \phi x \} \delta y_j \} / 2\Theta S \quad (14)$$

ここで, $X = (\mathcal{C} C - 1)$, $Y = (\mathcal{C} S - \Theta C)$ であり, $\mathcal{C}, \Theta, S, C$ は式(1)~(4)における場合と同様である。

2.で述べたと同様の解析方法により, 梁構造物の場合にも, 式(7)~(10)を用いて, 各節長で, 式(5)式(6)に相当した節長方程式, 式(15), (16)を立し, 得られた釣合方程式の係数行列の determinant を 0 とおいた振動方程式から, 繰返し演算により, ω の値を求め, この求めた ω の値に対応する釣合方程式から, 任意の変形量のある成分が単位量だけ変化したと仮定した場合の相対的な各節長の

$$\sum \delta y_i = 0, \quad \sum m_i = 0 \quad (15) \quad \sum \delta y_i - \omega^2 M_i \delta y_i = 0, \quad \sum m_i = 0 \quad (16)$$

変形量も求め, 材端条件に於いて, 式(11)~(14)に代入し, x に適当な値を与えてやれば, 各節材の振動変形および全体の振動変形が得られる。

6. 振動変形法による動的解析プログラムについて

前述のような解析方法で, 振動変形法による平面棒構造物の動的解析を行なうことができるが, ごく簡単な構造物以外は卓上計算機で解析することは不可能であり, やはり電子計算機を利用することが必要となる。本研究では, 電子計算機 (TOSBAC-3400) の容量の奥から, 梁構造物を対象として若干の初期のデータをもとに, 一次, 二次, ……と必要な次数までの固有振動数, 固有振動周期および振動変形が自動的に求まるような動的解析プログラムを作成したが, 上述のように, 平面棒構造物の場合も, 梁構造物の場合と同様な解析手順で解析できるから, この梁構造物の動的解析プログラムの

単一節長に対する基本式の部分と、各節長における釣合方程式の部分で多少手直しするだけで、平面構造物の動的解析プログラムも作成可能である。ここでは、プログラムの詳しい説明は省略し、計算機が行なう演算の流れを図-2のフローチャートで示す。

なお、この解析プログラムの振動波形をプロットする部分だけはTOSBAC-3400のカーブプロット用のサブプログラム、CURVE(X, AMAX, AMIN,)を利用して頂いた。

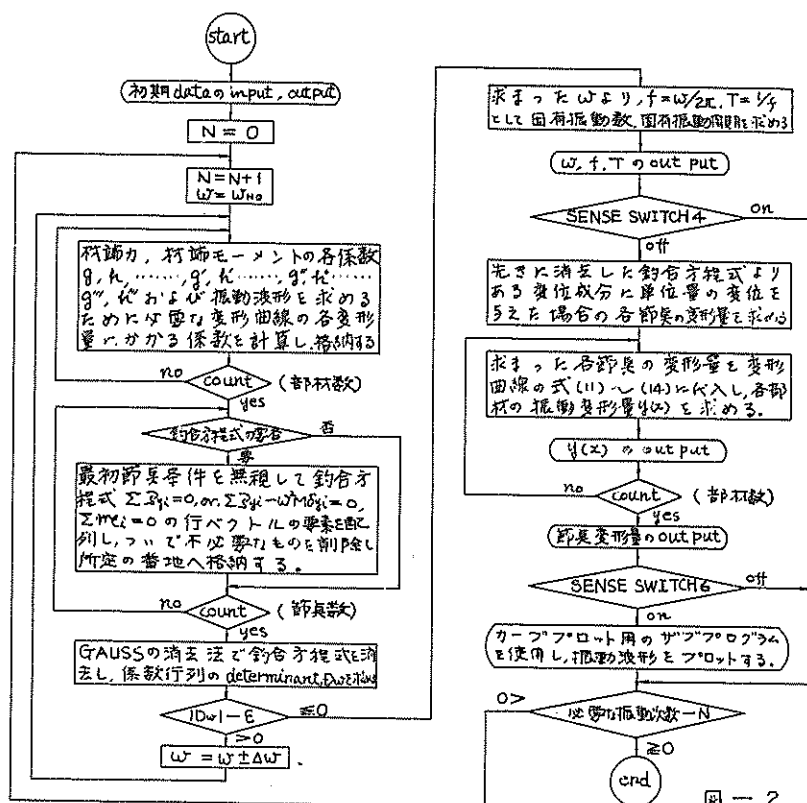


図-2

7. 計算例

計算例としては図-3に示すような曾江谷橋ゲルバー桁橋(43年度に当研究室で耐力測定実施)について、1)ゲルバー桁橋とした場合(図-3(a)), 2)張出し梁の先端に集中質量が作用した場合(図-3(b),(c))について解析した結果を、実測値とともに紹介するがその詳細は講義全日に来れる。

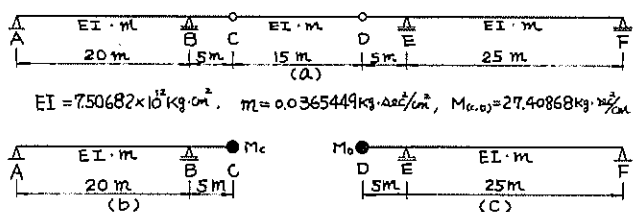


図-3

8. 参考文献

- 1) 谷口修: 振動工学 コロナ社
- 2) ジェコブセン・エー: 振動工学 (後藤 勇 英訳) 丸善株式会社
- 3) 星 児嶋: 振動変形法による格子桁の固有振動数の計算法ならびに模型実験について (学研講義)
- 4) 岡正英: 平面骨組構造の固有振動解析 日立造船技報 (1967-11)
- 5) 大屋竹之: 立体骨組構造の振動特性 日本建築学会論文報告集, 第149号, 昭和43年7月
- 6) W. Steinbach: Zur Anwendung der Deformationsmethod bei der Schwingungsberechnung, Der Bauingenieur.