

2-1 有孔H形はりの弾性応力

広島大学 正員 工務 大村 裕
 広島大学 正員 工務 ○工野谷 実
 佐藤工業 正員 森下 晴雄

1 まえがき

H形はりのウェブに、円孔、楕円孔、多角形孔を有するものを有孔H形はりという。有孔H形はりにおける孔辺の弾性応力解析は、孔の小さい場合、はりを無限板と仮定する無限板理論⁽¹⁾⁽²⁾によって可能であるが、孔の大きい場合、無限板理論は適合しないので未解決のまゝになっている。

著者は、無限板理論を発展させて孔の大きい場合でも適用可能な解析法を修正理論として提案する。この修正理論は、はりの任意断面における内力と外力の釣合を無限板理論に導入したものである。ここには、解析の簡単な円孔について、無限板理論から修正理論を誘導する過程を示すが他の孔形に対しても同様の考え方が適用できる。

2 円孔を有するH形はりの無限板解析法

有孔はりの弾性解析は、孔縁の境界条件を満足する A_{inj} の応力関数 F_0 を求めることに帰着する。応力関数 F は、はりに孔の無い場合の応力関数 F_1 と、 F_1 が孔縁において生ずる応力 $\sigma_r, \tau_{\theta r}$ を打消し無限遠において消失する応力関数 F_2 との和によって表わすことができる。

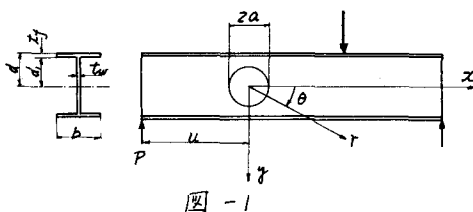


図-1

図-1のような、単純支持の有孔H形はり、集中荷重を受けるときの応力関 F_0 は、無限板理論の場合次のように複素応力関数 $\phi_0(\zeta)$ で表わすことができる。

$$\phi_0(\zeta) = \frac{Pa^2 i}{8I} \left[-\frac{1}{3}\zeta^3 - \lambda_0 \zeta^2 + (4\zeta_0^2 - 1)\zeta + \lambda_0 \zeta^2 + \frac{2}{3}\zeta^3 \right] \quad (1)$$

$$\psi_0(\zeta) = \frac{Pa^2 i}{8I} \left[\frac{2}{3}\zeta^3 + \lambda_0 \zeta^2 + 4\zeta_0^2 \zeta - 2\lambda_0 - \lambda_0 \zeta^2 + 4(\zeta_0^2 - \frac{1}{3})\zeta^3 + 2\lambda_0 \zeta^4 + 2\zeta^5 \right] \quad (2)$$

ここに $\zeta = re^{i\theta}$ i : 虚数単位 $\lambda_0 = \frac{u}{a}$ $\zeta_0 = \frac{c}{a}$ $c^2 = a^2 \left(1 + 2 \frac{b^2}{a^2} \right)$ I : はりの断面二次モーメント

従って応力 $\sigma_\theta, \sigma_r, \tau_{\theta r}$ は、次式のようになる。

$$\sigma_\theta = \frac{Pa^2}{4I} \left[(r^2 - 2r^4 + 5r^6) \sin 4\theta + \lambda_0 (r^{-1} - r^3 + 4r^5) \sin 3\theta + \{ 2\zeta_0^2 - 2r^2 - 2(1-3\zeta_0^2)r^4 \} \sin 2\theta + \lambda_0 (-3r^{-1} - r^3) \sin \theta \right] \quad (3)$$

$$\sigma_r = \frac{Pa^2}{4I} \left[(r^2 + 6r^4 - 5r^6) \sin 4\theta + \lambda_0 (-r^{-1} + 5r^3 - 4r^5) \sin 3\theta + \{ -2\zeta_0^2 - 2(1-4\zeta_0^2)r^2 + 2(1-3\zeta_0^2)r^4 \} \sin 2\theta + \lambda_0 (-r^{-1} + r^3) \sin \theta \right] \quad (4)$$

$$\tau_{\theta r} = \frac{Pa^2}{4I} \left[(r^2 + 4r^4 - 5r^6) \cos 4\theta + \lambda_0 (r^{-1} + 3r^3 - 4r^5) \cos 3\theta + \{ 2\zeta_0^2 - r^2 - (1-4\zeta_0^2)r^2 + 2(1-3\zeta_0^2)r^4 \} \cos 2\theta + \lambda_0 (-r^{-1} + r^3) \cos \theta \right] \quad (5)$$

3 無限板解析における内外力の釣合

はりに作用する外力と内力は、任意断面において等しくなければならない。という条件から、無限板解析の適用範囲が規制される。すなわち、はりの任意断面で内外力は常に次式を満足しなければならない。

$$M = \int_A \sigma_x y dy \quad (6)$$

$$S = \int_A \tau_{xy} dy \quad (7)$$

ここに、 M, S は任意断面に作用する外力、 σ_x, τ_{xy} は内力である。 A は積分を行う面積である。式(6)(7)

の右辺の内力によるモーメント、せん断力をそれぞれ M' 、 S' とし、無限板解析の内外力の比 $\frac{M'}{M}$ 、 $\frac{S'}{S}$ を円孔径とはり高の比 $\frac{a}{d}$ をパラメーターとして計算したものと図-2に示す。

図-2 からわかるように、モーメントの釣合はよく、断面の位置による変化も少ない。ところが、せん断力の釣合は悪く、断面の位置による変化も大きい。とくに、 90° 断面の釣合が著しく悪い。内外力の釣合が80%以上のとき、実用的な適用性があるとするれば、無限板解析は、垂直応力 σ_x について $\frac{a}{d} \leq \frac{3}{4}$ 、せん断応力 τ_{xy} について $\frac{a}{d} \leq \frac{1}{2}$ 、 $90^\circ \sim 60^\circ$ 断面を除けば $\frac{a}{d} \leq \frac{1}{2}$ において適用が可能である。

実際の有孔H形はり、円孔径がはり高の $\frac{2}{3}$ 以上は考えられないので、無限板解の適用はせん断応力 τ_{xy} によって制限される。すなわち荷重状態が、純せん断の場合、 $\frac{a}{d} \leq \frac{1}{2}$ に制限されるが、曲げとせん断を受ける場合、垂直応力 σ_x とせん断応力 τ_{xy} の比 $\frac{\sigma_x}{\tau_{xy}}$ によって適用範囲は変る。純曲げの場合適用に制限は受けないと考えて差しつかえない。

4 修正理論の誘導

内外力の釣合式(6)(7)が常に成立つ解析法として修正理論を以下に示す。

内外力が釣合うための条件を求める目的で、(6)(7)式が成立つと仮定して右辺の積分を行うと、右辺の λ_0 、 γ_0 と左辺の λ 、 γ の間には次のような関係があることが解、た。混同を防ぐため右辺の λ_0 、 γ_0 を λ とする。

$$\begin{aligned} \lambda_0 \neq 0 \text{ のとき } \lambda &= \lambda_0 / \left\{ (1-\gamma^2) - \frac{\alpha^2}{d^2} (13X^2 + \alpha^2) \left\{ \frac{1}{(X^2+1)^2} - \frac{\gamma}{\alpha^2} \right\} + 2\alpha^2 (3X^4 + 5X^2) \left\{ \frac{1}{(X^2+1)^2} - \frac{\gamma}{\alpha^2} \right\} - 2\alpha^6 X^4 \left\{ \frac{1}{(X^2+1)^2} - \frac{\gamma}{\alpha^2} \right\} \right\} \\ \gamma^2 &= 2\alpha^2 / \left\{ 2(1-\gamma) - (\tan^{-1} \frac{1}{X_1} - \tan^{-1} \frac{\gamma}{X_1}) (4X_1 - \frac{2\alpha^2}{X_1} - \frac{3\alpha^4}{2X_1^3}) - (\frac{1}{X_1^2+1} - \frac{\gamma}{\alpha^2}) (2\alpha^2 - \frac{3\alpha^4}{2X_1^2}) - \left\{ \frac{1}{(X_1^2+1)^2} - \frac{\gamma}{\alpha^2} \right\} (4\alpha^2 X_1^2 - 3\alpha^4) \right\} \\ \lambda_0 = 0 \text{ のとき } \lambda &= \lambda_0 / (1-\alpha^2) \\ \gamma^2 &= (2\gamma_0^2 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{3} + \frac{\alpha^6}{2}) / (1-\alpha^2)^2 \end{aligned}$$

ここに $\alpha = \frac{a}{d}$ 、 $X = \frac{x_0}{a}$ 、 $\gamma = \frac{y_0}{a}$ 、 $\alpha_1 = \frac{a}{d_1}$ 、 $X_1 = \frac{x_0}{d_1}$ 、 $\gamma_1 = \frac{y_0}{d_1}$ 、 x_0, y_0 : 断面における円孔縁の座標
上式は、無限板理論において定数として扱っていた λ_0 、 γ_0 を、はりの断面の位置によって変化する λ と考えねばならないことを示している。

修正理論の応力関数 F は、無限板理論の応力関数 F_0 に含まれている λ_0 、 γ_0 を λ 、 γ と置換するだけでよい。同様に、修正理論による応力 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} も(3)(4)(5)式の λ_0 、 γ_0 を λ 、 γ と置換すればよいので、その記述は省略する。

5 模型はりによる実験とその結果および考察

模型実験は、修正理論と実際の応力性状と適合するかどうかを照査し、実験的にも円孔周辺の力性状を把握する目的で行った。右表は模型はりの平

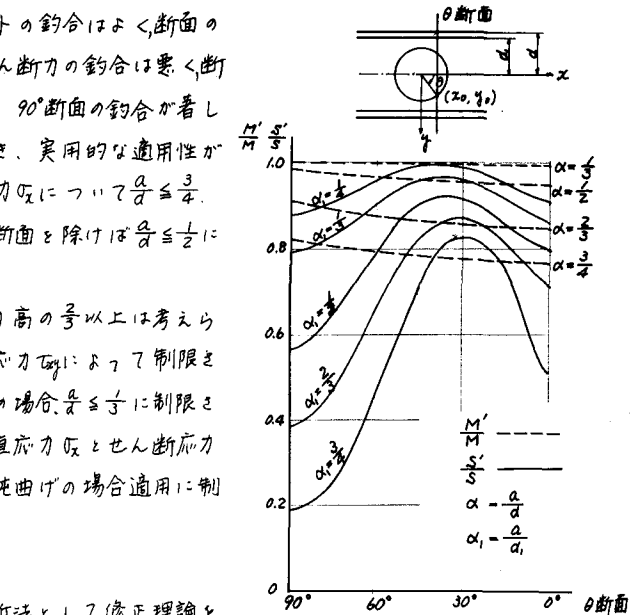


図-2

はり	a	u	2d	t _w	b	t _f	b ² /t _w	2C	I (cm ⁴)
1	3.87	68	25.09	0.62	12.46	0.95	1.533	39.93	4160
2	5.80	68	25.08	0.62	12.40	0.93	1.493	39.58	4109
3	7.75	68	25.07	0.62	12.41	0.95	1.521	39.81	4126

模型はりの平均断面値 (cm)

均断面値を示す。模型はり、圧延H形鋼 250×25×6×9、全長 210 cm、材質 SS41、弾性係数 $2.1 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ である。応力測定には電気抵抗線よりエステルヒウムゲージを使用し、載荷は、円孔中の断面が純曲げ、純せん断、曲げとせん断を受ける場合について行、た。

実験結果および修正理論、無限板理論による数値計算結果の一部を図-3に示す。図-3は、曲げとせん断の作用する荷重状態における90°断面の垂直応力 σ_x とせん断応力 τ_{xy} を、円孔径がはり高の $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ のものについて比較している。

図-3によれば、修正理論は垂直応力 σ_x 、せん断応力 τ_{xy} 、ともに実験値とよい近似を示している。一方無限板理論によるせん断応力 τ_{xy} は、円孔径が大きくなるほどその適合性が悪い。

紙面の都合上、他の実験結果、数値計算結果は講演当日発表する予定である。

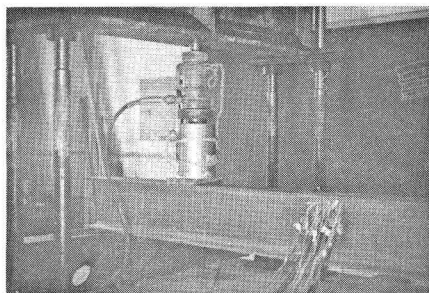
6 あとがき

円孔を有するH形はりの解析法として、無限板理論へ内外力の釣合を導入して修正理論を示した。次に、修正理論解析法の適用性を述べる。

- (1) $\frac{a}{d} \leq \frac{1}{2}$ において、孔辺の弾性応力と正確に与える。
- (2) $\frac{1}{2} < \frac{a}{d} \leq \frac{2}{3}$ において、 $\frac{a}{d} \leq \frac{1}{2}$ よりやや悪い近似を示すが、実用には十分である。
- (3) $\frac{a}{d} > \frac{2}{3}$ において、円孔部分のウェブ面積が非常に小さくなり、はりは一体として働かなくなり、上下のフランジ部分がラーメン部材のような挙動を示し、はりとしての解析が困難となる。

参考文献

- (1) Bower, J.E. "Elastic Stresses Around Holes in Wide-Flange Beams" Journal of the Structural Division, ASCE 1966
- (2) Bower, J.E. "Experimental Stresses in Wide-Flange Beams with Holes" Journal of the Structural Division, ASCE 1967
- (3) Savin, G.N. "Stress Concentration Around Holes" Pergamon Press 1961



実験装置

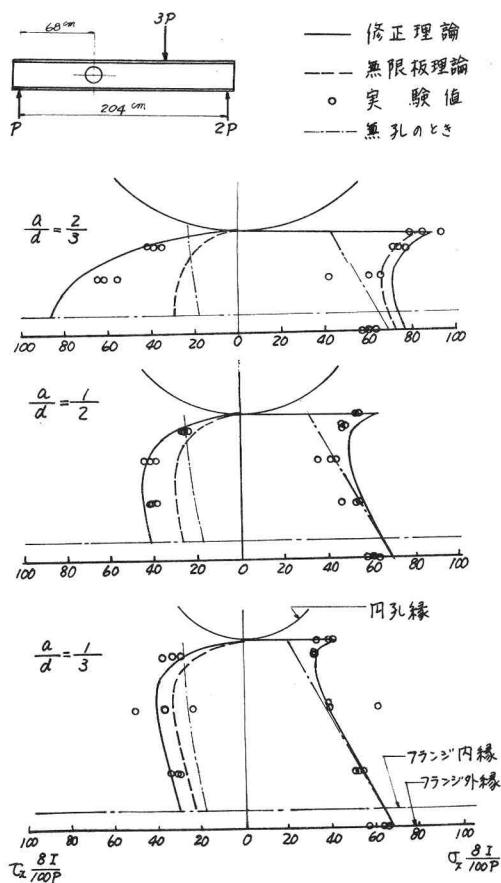


図-3