固有周期の自乗和を最小ならしめる構造物の断面形状に関する研究

山口大学工学部　正員　中川　建治

[1] 固有周期自乗和の計算法

構造物をN自由度の質点系とみなして集中質量をm_iとし，変形法のStiffness matrixをSとすれば，振動方程式

$$[m]\{\ddot{y}_j\}+[S]\{y_j\}=0 \qquad (1.1)$$

が成立する。

重みの関数[m]をもって直交し，Sの固有値[λ]を与える固有ベクトルを[φ]とすれば，固有周期の自乗和 $\Gamma=\sum_1^N T^2$ と $S^{-1}=F$ すなわちFlexibility matrixの関係はつぎのようになる。

$$[\varphi]^T[S][\varphi] = [\lambda]$$
$$[\varphi]^T[m][\varphi] = E$$
$$\Gamma = \sum_1^N T^2 = 4\pi^2\sum_1^N m_i F_{ii} \qquad (1.2)$$

F_{ii}は載荷点載荷方向たわみである。連続体に於ては載荷点載荷方向たわみ$w(x)$と単位長さ当りの質量$\rho(x)$より式(1.2)は次のようになる。

$$\Gamma = 4\pi^2\int \rho(x)\,w(x)\,dx \qquad (1.3)$$

[2] Γの意義

構造物の振動を固有モードに展開して各モードの変動$g_j(t)$で表わし，モードに分解したときの強制振動を

$$\ddot{g}_j(t)+2\zeta_j\omega_j\dot{g}_j(t)+\omega_j^2 g_j(t)=\zeta_j\,a\,e^{i\omega_j t} \qquad (2.1)$$

と仮定する。ここにω_jはモードの円振動数であり，ζ_jは減衰定数である。

この場合の運動エネルギー平均Vは次のようにして求められる。

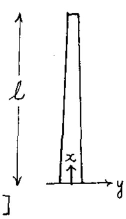
$$\{y_j\} = [\varphi]\{g_j(t)\} \qquad (2.2)$$

$$V = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_0^T\sum_1^N m_j\,|\dot{y}_j(t)|^2\,dt$$
$$= \frac{|a|^2}{64\sqrt{\pi}\cdot\pi^2}\,\Gamma \qquad (2.3)$$

このようにして，「固有周期の自乗和Γは最も危険な外力がモードの減衰定数に比例した振幅で作用した場合の運動エネルギー平均に相当する」ということが判る。外力と減衰力に対して上述のように非常に厳しい条件を付加したので，Γは直接構造物の動的最適設計に通ずるものではないが，「建設材料の使用量を一定にしたままでΓを最小にする設計法」を検討する。

[3] 片持ばり状無限自由度系の曲げ振動

1)　図−1に示すような断面積$A(x)$，質量ρ，曲げ剛さ$EI(x)$の片持ばりについてΓを求める。式(1.3)は，$w(x)$すなわち載荷点載荷方向たわみを求めることによりΓが得られることを示している。たわみ振動のみを考慮するので，水平集中単位荷



[図−1]

重による載荷点載荷方向（水平方向）のたわみは，変断面はりでも簡単に求められる。

$$
\left.
\begin{aligned}
w(x) &= \int_0^x \frac{(x-z)^2}{EI(z)}\,dz \\
\Gamma &= \frac{\rho}{E}\int_0^l A(x)\int_0^x \frac{(x-z)^2}{I(z)}\,dz\,dx = \frac{\rho}{E}\int_0^l \frac{\alpha(z)}{I(z)}\,dz \\
\alpha(z) &= \int_z^l A(x)(x-z)^2\,dx
\end{aligned}
\right\} \quad \cdots\cdots (3.1)
$$

曲げ剛さ $EI(x)$ の形状が未定であるから $A(x)$ も未定である。したがって式(1.8)の $\alpha(z)$ は求められない筈であるが，煙突などに於てはライニング等で曲げ剛性をもたない部分が断面積 $A(x)$ に含まれている。かつ，$I(x)$ の変化より $A(x)$ の変化はゆるやかであることに着目して，$A(x)$ を予め仮定して $\alpha(z)$ を求めることにする。ゆえに $I(z)$ のみが未知関数である。

$$
\begin{aligned}
A(x) &= A_0(x) + A_1(x) \\
&\simeq A_0(x)
\end{aligned}
$$

ここに $A_0(x)$ は曲げ剛性を持たない部分の断面積，$A_1(x)$ は剛性をもつ材料の断面積とする。

さて，使用材料には付帯条件として $\int_0^l A_1(x)dx = V$ が一定という成立しなければならない。y（断面の直径に相当）と $I(x)$，$A_1(x)$，V の間には形状に従って適当なパラメーター $\beta, \gamma, \zeta, \theta$ が定まり

$$
\left.
\begin{aligned}
A_1(x) &= \gamma\, y^{\theta}(x) \\
I(x) &= \beta\, y^{\zeta}(x)
\end{aligned}
\right\} \quad \cdots\cdots (3.2)
$$

$$
V = \int_0^l A_1(x)\,dx \quad \cdots\cdots (3.3)
$$

$$
\alpha(z) = \int_z^l A_0(x)(x-z)\,dx \quad \cdots\cdots (3.4)
$$

とする。このような条件のもとに式(1.7)の Γ を最小にするということは変分法の問題であり，パラメーター ε に対し，

$$
\frac{\partial}{\partial y}(\Gamma + \varepsilon V) = 0 \quad \cdots\cdots (3.5)
$$

を満足する $y(x)$ を求めることになる。結果は次のようになる。

$$
\left.
\begin{aligned}
y(x) &= C\{\alpha(x)\}^{\frac{1}{\zeta+\theta}} \\
C &= \left[\frac{V}{\gamma\int_0^l \{\alpha(x)\}^{\frac{\theta}{\theta+\zeta}}dx}\right]^{\frac{1}{\theta}}
\end{aligned}
\right\} \quad \cdots\cdots (3.6)
$$

このようにして求められた $y(x)$ より得られる断面積が仮定値 $A_0(x)$ と相違しているならば，繰り返し計算によって所定の精度の断面形状を得られる。

2) 全断面が曲げに抵抗する場合

式(3.6)はパラメーター $\beta, \zeta, \gamma, \theta$ が任意でも成立するが $A_0(x)$ を予め仮定している。しかるに，特殊な場合，角柱と中空断面の場合には，全断面が曲げに抵抗する。したがって，$I(z)$ と共に変化する場合の解を求め得た。これは，式(1.12)を理論的に解いたものではなく，著者の試算によって求め得たものである。

2-1° 角柱，あるいは円柱

$A(x)$ と $I(x)$ を，断面の直径に相当する $y(x)$ によって表わせば

$$\left.\begin{aligned} A(x) &= \gamma y^2(x) \\ I(x) &= \beta y^4(x) \end{aligned}\right\} \quad \text{------------} (3.7)$$

となり，β，γ はパラメーターである。$y(x)$ をここで次のように仮定する。

$$y(x) = \sqrt{\frac{5V}{2\gamma\ell}}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^{\frac{3}{4}} \quad \text{------------} (3.8)$$

これを式(3.7)，(3.4)，(3.6) に逐次代入して，これより得られた $y(x)$ が式(3.8) に一致すれば所定の断面であることが分る。ここに V は式(3.3) の表わされたものであり，代入して積分することよりすべての条件が満足されていることが分る。

2-2° 中空断面.

肉厚が一定で内径のみが変化する断面では

$$\left.\begin{aligned} A(x) &= \gamma y(x) \\ I(x) &= \beta y^3(x) \end{aligned}\right\} \quad \text{--------} (3.9)$$

とする。最適断面として，

$$y(x) = \frac{2V}{\gamma\ell}\left(1-\frac{x}{\ell}\right) \quad \text{------------} (3.10)$$

を仮定して，式(3.9)，(3.3)，(3.4)，(3.6) と順次代入して得られる結果の $y(x)$ は仮定断面式(3.10) に一致する。すなわちこれが求める断面形状である。

[4] 頂部に集中質量をもつ片持ばり

橋脚のように頂部に集中質量をもつ片持梁（図-2）については，N 自由度系とみなして解析すればよい。次に結果のみを示す。

脚部の体積 V を一定にして，各点の断面積を A_i，曲げ剛さを EI_i とする。上部の集中質量は脚部の単位質量 ρ と同じものが体積 v となって作用しているものとする。

$$A_i = \beta_i t_i^{\delta} \quad , \quad I_i = \gamma t_i^{\theta} \quad \text{-------} (4.1)$$

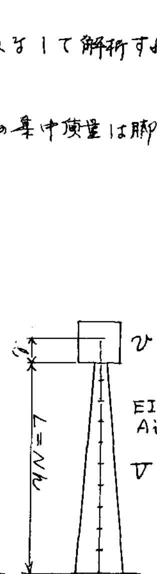
$$\alpha_1(j) = \sum_{i=j}^{N} A_i\left(i^2+i+\frac{1}{3}\right) - j\sum_{i=j}^{N} A_i(2i+1) + j^2\sum_{i=j}^{N} A_i \quad \text{---} (4.2)$$

$$\alpha_2(j) = \frac{Nv}{L}\left\{j^2 - j\left(2N+1+\frac{2N\ell}{L}\right) + \left(N+1+\frac{N\ell}{L}\right)\left(1+\frac{\ell}{L}\right)N + \frac{1}{3}\right\} \quad \text{----} (4.3)$$

$$t_i = \left(\frac{NV}{\gamma L}\right)^{\frac{1}{\delta}} \frac{\left\{\alpha_1(i)+\alpha_2(i)\right\}^{\frac{1}{\delta+\theta}}}{\left[\sum_{1}^{N}\left\{\alpha_1(j)+\alpha_2(j)\right\}^{\frac{\theta}{\theta+\delta}}\right]^{1/\theta}} \quad \text{----} (4.4)$$

$$\Gamma = \frac{\rho}{E}\left(\frac{L}{N}\right)^4 \sum_{1}^{N}\left\{\alpha_1(i)+\alpha_2(i)\right\}\frac{1}{I_i} \quad \text{----} (4.5)$$

ここに式(4.4) の t_i が Γ を最小にする断面 A_i，I_i を与えるものである。



[図-2]