

徳島大学工学部 正員 工博 星 治 雄
徳島大学工学部 正員 工修 ○ 神 田 睦

1. はしがき

格子桁の振動数を求める簡単な方法については、40年度に報告しましたが、今回は別の考え方から出発し、格子桁の振動数、および、振動モードに関して解析を行なった。

断面の異なる梁(たとえば、連続梁、片持梁など)の振動解析に対して有効な方法の一つに、梁の質量を数個の集中質量に置き換え、梁は曲げ剛性のみを有するものとした連成系を解く方法がある。そこで、横方向への広がりを持つ格子桁へこの考えの適用を試みたわけである。まず、格子桁のそれぞれの桁の質量は、各格点に集中するとする(さらに多くの集中質量に分割することも可能であるが、本法でも相当精度がよいと思われる。)その集中質量が重さのない、曲げ剛性のみを有する桁に乗っているものとみなす。つぎに、桁の変位によって生じる質量へ作用する力、支反力も、各質点の存在する位置の関数(影響係数)として表わす。そして各質点について、運動方程式を立て、調和振動とみなして、その振動数を格子桁の固有振動数とする方法である。

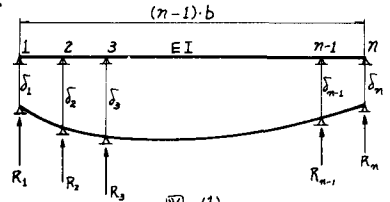
2. 格子桁の振動数と振動モード(主桁のねじり剛性を無視した場合)

イ) 影響係数 影響係数とは一本の連続梁において、支点だけが単位沈下したときに支点に生じる反力とし、 f_{ij} で表わすものとする。主桁の場合は f^s 、横桁の場合は f^c とし、それぞれ区別する。主桁、横桁ともに格点(一般的には集中質量を置いた位置)で支持された連続梁とみなした。

ロ) 連続梁における支反力の影響係数と支点沈下量との関係

図-1に示すような支点沈下を行なった連続梁に三連モーメントの定理を用いて、支反力と支点沈下量との関係をマトリックス表示すれば、つぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \frac{6EI}{b^3} \cdot [C] \cdot [A]^{-1} \cdot [B] \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} \quad (1)$$



ここに、 $[C]$ 、 $[A]$ 、 $[B]$ はそれぞれ、

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式-(1)の関係を利用して影響係数と支点沈下量との関係を導くと、式-(3)のようになる。左辺のマトリックスは正方行列、右辺の最右項は単位行列であるから、結局影響係数は簡単になって、式-(4)として表わされる。ただし、 $[E]$ は単位行列である。

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} = \frac{6EI}{b^3} [C] [A]^{-1} [B] [E] \quad (3)$$

$$[f_{ij}] = \frac{6EI}{b^3} \cdot [C] \cdot [A]^T \cdot [B] \quad (4)$$

ハ 各質点における運動方程式 任意の質点における集中質量を m_i 、その質の沈下(撓み)を y_i 、影響係数を f_{ij} とすると、任意点 i における運動方程式は、式-(5) で示される。

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \sum f_{ij} y_j = 0 \quad , \quad \text{ただし, } f_{ij} = f_{ij}^s + f_{ij}^c \quad (5)$$

ニ 振動数と振動モード、 式-(5)で得られる n 個(格点数)の連立微分方程式を解けば、振動数、および振動モードが得られる。

いま、図-(2)に示すような三主桁三横桁の格子桁について計算例を示すとつぎのようになる。ただし、ここでは、振動モードが横桁方向ならびに縦桁方向ともに対称な場合だけを示す。格点 2, 3, 7, 8 について運動方程式をたてると、それぞれ、

$$m_2 \ddot{y}_2 + (f_{2,2}^s + f_{2,2}^c + f_{2,4}^s + f_{2,4}^c) y_2 + (f_{2,2}^s + f_{2,7}^c + f_{2,12}^c) y_7 = 0 \quad (6)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 + (f_{3,2}^s + f_{3,2}^c + f_{3,4}^s + f_{3,4}^c) y_3 + (f_{3,2}^s + f_{3,7}^c + f_{3,12}^c) y_7 = 0 \quad (7)$$

$$m_7 \ddot{y}_7 + (f_{7,2}^s + f_{7,2}^c + f_{7,4}^s + f_{7,4}^c) y_7 + (f_{7,2}^s + f_{7,7}^c + f_{7,12}^c) y_{12} = 0 \quad (8)$$

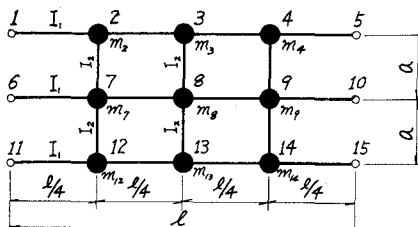


図-(2)

$$m_8 \ddot{y}_8 + (f_{8,2}^s + f_{8,2}^c + f_{8,4}^s + f_{8,4}^c) y_8 + (f_{8,2}^s + f_{8,7}^c + f_{8,12}^c) y_{12} = 0 \quad (9)$$

となるが、構造、および、振動モードの対称性から、

$$y_2 = y_4 = y_{12} = y_{14}, \quad y_3 = y_{13}, \quad y_7 = y_9, \quad m_2 = m_3 = m_4, \quad m_7 = m_8 = m_9 \quad (10)$$

となる。いま、各質点は調和振動を行なうものとして、 $y_2 = \delta_2 \sin \omega t$, $y_3 = \delta_3 \sin \omega t$, $y_7 = \delta_7 \sin \omega t$, $y_8 = \delta_8 \sin \omega t$ とおき、さうに、 $Y_2 = \delta_2 / \delta_8$, $Y_3 = \delta_3 / \delta_8$, $Y_7 = \delta_7 / \delta_8$ とおくと、式-(6)~(9) はつぎのようになる。ここに δ は振巾を表わすものとする。

$$\left. \begin{aligned} -m_2 \omega^2 Y_2 + (f_{2,2}^s + f_{2,2}^c + f_{2,4}^s + f_{2,12}^c) Y_2 + f_{2,2}^s Y_3 + f_{2,7}^c Y_7 &= 0 \\ -m_3 \omega^2 Y_3 + (f_{3,2}^s + f_{3,4}^s) Y_2 + (f_{3,2}^s + f_{3,7}^c + f_{3,12}^c) Y_3 + f_{3,7}^c Y_7 &= 0 \\ -m_7 \omega^2 Y_7 + (f_{7,2}^s + f_{7,12}^c) Y_2 + (f_{7,2}^s + f_{7,7}^c + f_{7,12}^c) Y_7 + f_{7,7}^s Y_3 &= 0 \\ -m_8 \omega^2 Y_8 + (f_{8,2}^s + f_{8,12}^c) Y_3 + (f_{8,7}^s + f_{8,9}^s) Y_7 + f_{8,2}^s + f_{8,7}^c &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式-(11)の ω , Y_2 , Y_3 , Y_7 の数値解を得ることは困難であるので、例えば、つぎのような方法によるのが比較的良好な結果が得られる。まず ω を仮定し、任意の 3 式より Y を求め、それらを残りの式に代入し、その値が 0 になるように反復すればよい。

3) 模型実験

模型実験に用いた断面諸元は表-1 に示すようである。

	断面積 (cm ²)	EI (kg·cm ²)	GJ (kg·cm ²)
主 桁	1730	1.348 × 10 ⁹	1.85 × 10 ⁶
横桁	I 型	1329	4.59 × 10 ⁸
	箱型	3.110	3.05 × 10 ⁷

支間長 (cm)	主桁心-心間隔 (cm)		
360	120	60	30

表-(1)

4) 理論値と模型実験値, ならびに他の理論値との比較

本法による理論値と, 模型実験による実験値と, 置換梁法による計算値¹⁾, ならびに, 振動変形法による計算値²⁾とを比較して表-(2)に示す。表中の振動数は毎秒振動数で示した。

5) 考察

表-(2)より分るように, 他の計算方法と比較して, 非常に似た値である。また実験値と比較しても違いは, 精々4~8%である。紙面の都合上, 表示はしていないが, 振動モードに関して振動変形法と比較した所振動数以上に良く一致した。主桁のねじり剛性を無視し得ない場合については, 今回は取り扱っていないのであるが, 横桁の反力の影響係数 f^c を求める場合に, 主桁のねじりモーメントがそのまゝ横桁の曲げモーメントとして伝わるような連続梁を考えればよいと思われる。ただし, その場合得られる振動数は, 主桁のねじり振動の影響は無視されていることになる。

6) おすび

本法は, 一口に言えば, 固有振動数が非常に簡単に計算出来ること

共に, 精度もかなり良く, 振動モードも得られるという利点がある。さらに, 強制振動に関しては, 運動方程式の右辺に力の関数を考えればよいことが分る。また, 三主桁三横桁に対する労力と四主桁四横桁に対する労力とは全く同じであり, 卓上の計算機で楽に求められる。

参考文献 1) 「置換梁による格子桁の固有振動数計算について」

昭和41年5月 土木学会第21回年次学術講演会 I-35 星 治雄, 神田 睦

2) 「振動変形法による格子桁の固有振動数の計算法, ならびに, 模型実験について」

昭和40年5月 土木学会第20回年次学術講演会 星 治雄, 児嶋 弘行

格子型式	横桁断面	主桁間隔	本方法		置換梁法	実験値	振動変形法	
			A	B			A	B
	I	30	36.1	36.4	36.3	35.3	36.2	36.6
		60	34.7	35.3	34.9	34.9	34.9	36.1
		120	32.3	33.5	32.3	33.0	32.4	34.9
	□	30	37.2	37.3	37.4	35.5	37.2	36.8
		60	37.1	37.0	37.1	36.0	37.0	37.1
		120	36.0	36.5	36.3	35.5	36.1	37.2
	I	30	35.6	36.1	35.6	34.5		
		60	33.7	34.6	33.7	32.7		
		120	30.6	32.1	30.4	31.5		
	□	30	37.2	37.3	37.2	34.0		
		60	36.7	36.9	36.7	35.2		
		120	35.5	36.2	35.6	34.7		
	I	30	35.0	35.6	34.9	30.0		
		60	32.6	33.7	32.6	33.6		
		120	29.1	32.6	28.5	31.5		
	□	30	37.1	37.2	37.1	35.6		
		60	36.6	36.7	36.3	35.3		
		120	35.0	35.7	34.9	35.7		
	I	30	36.4	—	36.7	35.4		
		60	35.3	—	35.6	35.3		
		120	33.5	—	33.7	35.2		
	□	30	37.3	—	37.5	35.5		
		60	37.0	—	37.3	34.7		
		120	36.5	—	36.7	35.1		
	I	30	36.1	—	36.1	33.9		
		60	34.6	—	34.6	34.0		
		120	32.1	—	32.1	32.0		
	□	30	37.2	—	37.4	35.9		
		60	36.9	—	37.0	35.9		
		120	36.2	—	36.2	33.5		
	I	30	35.2	—	35.6	32.7		
		60	33.7	—	33.7	33.4		
		120	30.7	—	30.7	27.8		
	□	30	37.2	—	37.3	34.7		
		60	36.7	—	36.7	35.4		
		120	35.7	—	35.7	34.4		
(単純梁)	—	—	37.5	—	37.8	37.0		

表-(2)の計算値において、A、Bとあるのは、つぎのような意味である。

A：横方向、対称な振動。

B：横方向、向は逆対称な振動。

また、置換梁法は、Aの値を合しか示していない。

表-(2)の計算値において, A, Bとあるのは, つぎのような意味である。
A: 横方向, 縦方向共に対称な振動。
B: 横方向は対称, 縦方向は逆対称な振動。
また, 置換梁法は, Aの場合しか示していない。

表-(2)