

斜め吊材をもつ吊橋の静力学的性質について

徳島大学工学部 正 員 工博 星 治 雄

徳島大学大学院 学生員 ○ 春 本 繁

1. 要 旨

本研究は、斜め吊材をもつ吊橋についての静力学的性質を理論的に解析したものである。斜め吊材をもつ吊橋は、剛性において従来の吊橋型式である鉛直吊材をもつ吊橋に比べてすぐれている英が多いといわれているが、これらの静力学的性質は実験的には検討されているが、理論的にはあまりなされていない。そこで本研究では、変形法、応力法を用いて斜め吊材をもつ吊橋の静力学的性質を解析し、弾性理論により解析された鉛直吊材をもつ吊橋の静力学的性質と比較検討したものである。応力法の解析については変形法とほぼ同一な結果を得たので解析方法は省略する。

2. 変形法による斜め吊材をもつ吊橋の解析

斜め吊材をもつ吊橋を、直線部材によって構成される非常にフレキシブルな平面トラス形状の構造（ただし補剛桁の曲げ剛性を考慮する）であると考える。

(1) 部材の釣合方程式

直線部材を断面一様な弾性梁と考え、図-1のように座標をとる。梁の変形は (ξ, η) 面内に生じるものとして、 ξ 軸、 η 軸方向の変位および ξ 軸まわりの角変位を、 U 、 V 、 ψ で表わす。梁の変位として次の一次式を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} U(\xi, \eta) &= U(\xi) - \eta \cdot \psi(\xi) \\ V(\xi, \eta) &= V(\xi) \end{aligned} \right\} (1)$$

また部材に温度と初期応力が作用するものとする、

梁に生じる歪エネルギーは、

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ EF \left(\frac{dU(\xi)}{d\xi} \right)^2 + GF_s \left(\frac{dV(\xi)}{d\xi} - \psi(\xi) \right) + EI \left(\frac{d\psi(\xi)}{d\xi} \right)^2 + 2(-\alpha \epsilon EF + P) \frac{dU(\xi)}{d\xi} + C \right\} d\xi \quad (2)$$

である。ここで α : 線膨張係数 ϵ : 温度上昇 P : 初期部材応力 F : 部材断面積 F_s : 有効せん断面積 E : 弾性係数 l : 部材長 である。

(2) 式を変位について変分し、部分積分して、積分項にだけ注目し変数変換すると

$$\delta V = - \int_0^l \left(\frac{dX}{d\xi} \delta U + \frac{dY}{d\xi} \delta V + \frac{dN}{d\xi} + Y \right) d\xi \quad (3)$$

となる。ここで $X = EF \frac{dU}{d\xi} + (-\alpha \epsilon EF + P)$, $Y = GF_s \left(\frac{dV}{d\xi} - \psi \right)$, $N = EI \frac{d\psi}{d\xi}$ (4)

安定な状態にある梁の歪エネルギーは極小値であるから、 $\delta V = 0$ でなければならぬ。よって梁の釣合方程式は $\frac{dX}{d\xi} = 0$, $\frac{dY}{d\xi} = 0$, $\frac{dN}{d\xi} = 0$ (5) である。

(2) 吊橋の釣合方程式

部材としての梁と吊橋全体との位置関係は、すべての梁の結合点に適当な順序数を付して、吊橋全体に共通な基本座標 x , y と梁に固有な部分座標とのベクトル関係を次のようにあらわす。(図-3)

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{ij} & \sin \theta_{ij} \\ -\sin \theta_{ij} & \cos \theta_{ij} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここで $\cos \theta_{ij} = (x_j - x_i) / l_{ij}$, $\sin \theta_{ij} = (y_j - y_i) / l_{ij}$, $l_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$

吊橋全体の歪エネルギーは、部材の歪エネルギーの総和であるから

$$V = \frac{1}{2} \sum_x \sum_y \left(\left(\frac{1}{2} E E_x^2 + \frac{1}{2} G \nu_x^2 \right) d\epsilon_i d\eta d\phi \right) \quad (7)$$

となる。部材の釣合方程式を求めたと同様に (7) 式を変分し、

x, y 座標に座標変換して、 i 結合点の釣合方程式を求めると、次

のようになる。

$$\begin{aligned} & \left[-\left\{ \sum_x a_{ij} \right\} U_i + \sum_x (a_{ij})(U_i) \right] + \left[\left\{ -\sum_x (b_{ij}) + \sum_x (b_{ij}) \right\} U_i + \sum_x (b_{ij})(U_i) - \sum_x (b_{ij})(U_j) \right] \\ & + \left[\left\{ -\sum_x (c_{ij}) + \sum_x (c_{ij}) \right\} \psi_i - \sum_x (c_{ij})(\psi_i) + \sum_x (c_{ij})(\psi_j) \right] + \left(\sum_x d_{ij} - \sum_x d_{ij} \right) + X_i = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\left\{ -\sum_x (b_{ij}) + \sum_x (b_{ij}) \right\} U_i + \sum_x (b_{ij})(U_i) - \sum_x (b_{ij})(U_j) \right] + \left[-\left\{ \sum_x \bar{a}_{ij} \right\} U_i + \sum_x (\bar{a}_{ij})(U_i) \right] \\ & + \left[\left\{ \sum_x \bar{c}_{ij} - \sum_x \bar{c}_{ij} \right\} \psi_i + \sum_x (\bar{c}_{ij})(\psi_i) - \sum_x (\bar{c}_{ij})(\psi_j) \right] + \left[\left(\sum_x \bar{d}_{ij} - \sum_x \bar{d}_{ij} \right) \right] + Y_i = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\left\{ -\sum_x (c_{ij}) + \sum_x (c_{ij}) \right\} U_i + \sum_x (c_{ij})(U_i) - \sum_x (c_{ij})(U_j) \right] + \left[\left\{ \sum_x (\bar{c}_{ij}) - \sum_x (\bar{c}_{ij}) \right\} U_i \right. \\ & \left. - \sum_x (\bar{c}_{ij})(U_j) + \sum_x (\bar{c}_{ij})(U_i) \right] + \left\{ \sum_x e_{ij} \right\} \psi_i + \sum_x (f_{ij})(\psi_j) + N_i = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

ここで

$$a_{ij} = \frac{E_{ij} F_{ij}}{\ell_{ij}} \cos^2 \theta_{ij} + \frac{12 E_{ij} I_{ij}}{\ell_{ij}^3 (1 + 12 E_{ij})} \sin^2 \theta_{ij}, \quad \bar{a}_{ij} = \frac{E_{ij} F_{ij}}{\ell_{ij}} \sin^2 \theta_{ij} + \frac{12 E_{ij} I_{ij}}{\ell_{ij}^3 (1 + 12 E_{ij})} \cos^2 \theta_{ij}$$

$$b_{ij} = \left(\frac{E_{ij} F_{ij}}{\ell_{ij}} - \frac{12 E_{ij} I_{ij}}{\ell_{ij}^3 (1 + 12 E_{ij})} \right) \cos \theta_{ij} \sin \theta_{ij}, \quad c_{ij} = -\frac{6 E_{ij} I_{ij}}{\ell_{ij}^3 (1 + 12 E_{ij})} \sin \theta_{ij}$$

$$\bar{c}_{ij} = -\frac{6 E_{ij} I_{ij}}{\ell_{ij}^3 (1 + 12 E_{ij})} \cos \theta_{ij}, \quad d_{ij} = (-d_{ij} t_{ij} E_{ij} F_{ij} + P_{ij}) \cos \theta_{ij}$$

$$\bar{d}_{ij} = (-d_{ij} t_{ij} E_{ij} F_{ij} + P_{ij}) \sin \theta_{ij}, \quad e_{ij} = -\frac{4 E_{ij} I_{ij} (1 + 3 E_{ij})}{\ell_{ij}^3 (1 + 12 E_{ij})}$$

$$f_{ij} = \frac{2 E_{ij} I_{ij} (6 E_{ij} - 1)}{\ell_{ij}^3 (1 + 12 E_{ij})}, \quad \epsilon_{ij} = \frac{F_{ij} I_{ij}}{G_{ij} F_{ij} \ell_{ij}^3}$$

上の釣合方程式 (8) ~ (10) 式をすべての結合点についてまとめてマトリックス表示すると、

$$[A] \cdot [\bar{U}] = [\bar{X}] \quad (11)$$

となる。ここで $[A]$ は係数行列、 $\bar{U}$ は節変位、 $\bar{X}$ は外力ベクトル

$\bar{U}$ は (11) 式を解くことによって得られる。

(3) 部材力の算定

各部材の部材端の水平方向力、鉛直方向力および曲げモーメントを、 X_{iji} , Y_{iji} , N_{iji} とすると

$$X_{iji} = -a_{ij}(U_{iji} - U_{ijj}) - b_{ij}(U_{iji} - U_{ijj}) - c_{ij}(\psi_{iji} + \psi_{ijj}) \quad (12)$$

$$Y_{iji} = -b_{ij}(U_{iji} - U_{ijj}) - \bar{a}_{ij}(U_{iji} - U_{ijj}) + \bar{c}_{ij}(\psi_{iji} + \psi_{ijj}) \quad (13)$$

$$N_{iji} = -c_{ij}(U_{iji} - U_{ijj}) + \bar{c}_{ij}(U_{iji} - U_{ijj}) + e_{ij}\psi_{iji} + f_{ij}\psi_{ijj} \quad (14)$$

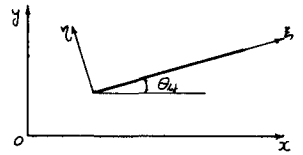
で表わされる。よって部材力は (11) 式より求められた変位を (12) ~ (14) 式に代入すると得られる。

3. 数値計算

斜め吊材をもつ吊橋は、図-4、鉛直吊材をもつ吊橋は、図-5について、格点1、格点3に $P=1^t$ が載荷した2つの例について数値計算を行ない、斜め吊材をもつ吊橋の静力学的性質と、鉛直吊材をもつ吊橋の静力学的性質とを比較する。変形法による数値計算と、応力法による数値計算とは、ほぼ同一な結果であるので、変形法により求められた数値を用いる。

(1) ケーブルの張力

図-3



斜め吊桁をもつ吊橋のケーブルの張力と、鉛直吊桁をもつ吊橋のケーブルの張力を比較する。

表-1

荷重 $P=1\text{t}$ が格突 1 に載荷した場合				荷重 $P=1\text{t}$ が格突 3 に載荷した場合			
格突	斜め吊桁	鉛直吊桁	斜め鉛直	格突	斜め吊桁	鉛直吊桁	斜め鉛直
1'	0.144988 ^t	0.487730 ^t	29.73 [°]	1'	0.920951 ^t	1.162898 ^t	79.19 [°]
3'	0.234289	0.448550	52.23	3'	-0.035615	1.045275	—
5'	0.320546	0.448550	71.46	5'	0.510918	1.045275	48.38
7'	0.251066	0.487730	51.48	7'	0.713583	1.162898	61.36

(2) 補剛桁の曲げモーメント

斜め吊桁をもつ吊橋の補剛桁の曲げモーメントと、鉛直吊桁をもつ吊橋の補剛桁の曲げモーメントを比較する。(表-2)

表-2

荷重 $P=1\text{t}$ が格突 1 に載荷した場合				荷重 $P=1\text{t}$ が格突 3 に載荷した場合			
格突	斜め吊桁	鉛直吊桁	斜め鉛直	格突	斜め吊桁	鉛直吊桁	斜め鉛直
1	0.45284 ^{t.m}	6.10501 ^{t.m}	7.42 [°]	1	-0.12162 ^{t.m}	-0.05647 ^{t.m}	215.37 [°]
2	0.15757	2.96573	5.31	2	0.07243	1.68891	4.29
3	-0.13770	0.56057	—	3	0.26657	5.18466	5.14
4	-0.06865	-1.04569	6.57	4	0.07161	0.58522	12.24
5	0.00041	-1.93943	—	5	-0.10335	-2.31534	4.46
6	-0.02047	-2.03427	1.01	6	-0.00770	-3.31109	0.23
7	-0.04135	-1.39499	2.96	7	-0.05071	-2.55647	1.98

(3) 吊桁の応力

斜め吊桁をもつ吊橋の吊桁の最大応力の値は、鉛直吊桁をもつ吊橋の吊桁の最大応力の値の約 90 ~ 95 % である。

5. 結 言

本研究により得られた結果をまとめるとつぎのようである。

- (1) 補剛桁の曲げモーメントのみを考えて、吊橋構造を考慮する場合、吊桁を斜め形状にすると、従来の鉛直形状のものより非常に有利であると思われる。
- (2) ケーブルの張力についてのみ考えて、吊橋構造を考慮する場合、吊桁を斜め形状にすると、従来の鉛直形状のものより若干有利であると思われる。
- (3) 吊桁の応力についてのみ考えて、吊橋構造を考慮する場合、吊桁を斜め形状にすると、従来の鉛直形状のものよりわずかに有利であると思われる。

(補) 表-1 で示されるようにケーブルの張力に圧縮力が作用しているが、この問題に対する処置については当日発表する。

図 - 4

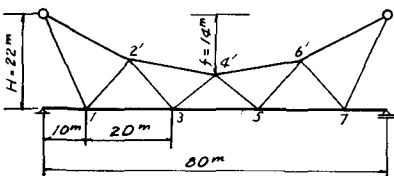


図 - 5

