変形法による平面構造物の非線形解法と中間荷重の取扱いについて

徳島大学工学部　正員　児嶋弘行
〃　　　〃　○平尾　潔

要　旨

本研究は，普通の構造物のように外力の作用によって原形と平衡形とのずれが無視できないような比較的大きな変形量を生ずる吊り橋などの剛性の小さい構造物について，従来の変形法に軸力の2次的影響と有限変位理論とを導入し，より厳密にこれらの構造物を解析するための非線形解法を提案し，中間荷重が作用した際の，その取扱いについて述べたものである。

1　軸力の2次的影響を導入した場合の単一部材に対する基本式

基本式の誘導方法については参考文献1)を参照して頂き，ここでは基本式だけを示す。

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{P}_{xij} &= a_{ij}(\delta x_i - \delta x_j) + b_{ij}(\delta y_i - \delta y_j) - C_{ij}(\theta_i + \theta_j) \\
\mathcal{P}_{yij} &= b_{ij}(\delta x_i - \delta x_j) + \bar{a}_{ij}(\delta y_i - \delta y_j) + \bar{C}_{ij}(\theta_i + \theta_j) \\
\mathcal{M}_{ij} &= -C_{ij}(\delta x_i - \delta x_j) + \bar{C}_{ij}(\delta y_i - \delta y_j) + d_{ij}\theta_i + \bar{d}_{ij}\theta_j
\end{aligned}\right\} \quad \text{―――― (1)}$$

ここで，各係数，a_{ij}，b_{ij} ―――――――――― d_{ij}，$\bar{d}_{ij}$ は参考文献1)で用いたと同様なものである。

2　有限変位理論について

従来の弾性理論では「荷重による構造物の変形は微少で原形と平衡形のずれは無視できる」という仮定のもとに解析されていたが，変形が大きくなるとこのずれは無視できなくなる。したがって，このずれを考慮して構造解析をしようとするのが有限変位理論であり，従来の変形法と有限変位理論を考慮した変形法との基本的な相異は前出の基本式(1)における各係数，a_{ij}，b_{ij}，――――，d_{ij}，$\bar{d}_{ij}$ に含まれる l_{ij}，$\cos\varphi_{ij}$，$\sin\varphi_{ij}$ をつぎのように書き換えるところにある。

$$\cos'\varphi_{ij} = \frac{(x_j - x_i) - (\delta x_j - \delta x_i)}{l'_{ij}}$$

$$\sin'\varphi_{ij} = \frac{(y_j - y_i) - (\delta y_j - \delta y_i)}{l'_{ij}}$$

$$l'_{ij} = \sqrt{\left\{(x_j - x_i) - (\delta x_j - \delta x_i)\right\}^2 + \left\{(y_j - y_i) - (\delta y_j - \delta y_i)\right\}^2}$$

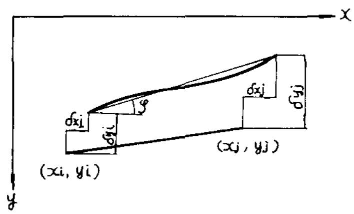


図 ― 1

3　中間荷重の取扱いについて

中間荷重を不連続荷重と連続荷重とに分けて，その取扱い方を考える。

a)　不連続荷重の場合

集中荷重とか，部分分布荷重のように連続的に作用しない中間荷重をうける場合には，その不連続点を一つの格点とみなして，部材には必ず連続荷重が作用しているか，全く荷重が作用していないかのいずれかになるように構造を細分して取扱う。このようにすれば，b)において連続荷重は格点荷重に置換できるから，すべての荷重を格点荷重になおして取扱うことができる。

b)　連続荷重の場合

連続荷重としては，等分布荷重，等変分布荷重を考え，他の荷重については省略する。このように

しても，実際の荷重状態として不便をきたすようなことはないと考えられる．また，等分布荷重の場合は，等変分布荷重における両端の荷重強度w_i，w_jを$w_i = w_j$とおいたのと同等であるから等変分布荷重についてのみ考える．

c) 等変分布荷重が作用した場合の基本式

荷重強度を材端iでw_i，材端jでw_jの等変分布荷重が作用した場合の基本式はつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{P}_{xij} &= \{a_{ij}(\delta_{xi}-\delta_{xj}) + b_{ij}(\delta_{yi}-\delta_{yj}) - C_{ij}(\theta_i+\theta_j)\} \\
&\quad \{(2w_i+w_j)\cdot l_{ij}/6 + (w_j-w_i)\cdot l_{ij}\left(\begin{smallmatrix}\phi_{6ij}\\ \psi_{6ij}\end{smallmatrix}\right)/60\}\cdot \sin\varphi_{ij} \\
\mathcal{P}_{yij} &= \{b_{ij}(\delta_{xi}-\delta_{xj}) + \bar{a}_{ij}(\delta_{yi}-\delta_{yj}) + \bar{C}_{ij}(\theta_i+\theta_j)\} \\
&\quad -\{(2w_i+w_j)\cdot l_{ij}/6 + (w_j-w_i)\cdot l_{ij}\cdot\left(\begin{smallmatrix}\phi_{6ij}\\ \psi_{6ij}\end{smallmatrix}\right)/60\}\cdot \cos\varphi_{ij} \\
\mathcal{M}_{ij} &= \{-C_{ij}(\delta_{xi}-\delta_{xj}) + \bar{C}_{ij}(\delta_{yi}-\delta_{yj}) + d_{ij}\theta_i + \bar{d}_{ij}\theta_j\} \\
&\quad -\{(w_i \quad w_j)\cdot l_{ij}^2\cdot\left(\begin{smallmatrix}\phi'_{2ij}\\ \psi'_{2ij}\end{smallmatrix}\right)/24 + (w_i-w_j)\cdot l_{ij}^2\cdot\left(\begin{smallmatrix}\phi_{6ij}\\ \psi_{6ij}\end{smallmatrix}\right)/120\}
\end{aligned}\right\} \qquad \text{——— (2)}$$

ここで，　$\phi_{6ij} = 60(1-\phi_{2ij})/(\lambda_{ij}\cdot l_{ij})^2$，　$\psi_{6ij} = -60(1-\psi_{2ij})/(\lambda_{ij}\cdot l_{ij})^2$

また，ϕ_{2ij}，ψ_{2ij}，λ_{ij}については参考文献1)と同様であるから，そちらを参照されたい。

求めた基本式(2)の各式の第1項は前出の基本式(1)と同一であるから中間荷重による影響が各式の第2項に現われている．

以上のことより，部材に中間荷重が作用する場合にも，a)の場合にはこれを各点荷重に置換し，b)の場合には基本式(1)のかわりに基本式(2)を用いれば，従来の変形法の場合とまったく同様に各節点において釣合方程式をたてることができる．

4　解の求め方

軸力の2次的影響，および，有限変位理論を導入したことにより釣合方程式は高次の非線形方程式となり，解を解析的に求めることは不可能となる．したがって，解を求めるには繰返し漸近法にたよらなければならない．一般にN個の節点からなる構造物のStiffness matrixは3N元（ただし，支点も含めた節点条件によっては省略されるものもあるから通常はそれ以下となる.）となり，釣合方程式はつぎの式(3)のようになる．

$$\mathbb{S} = \mathbb{K}\ \Delta \qquad \text{——————— (3)}$$

ここで，$\mathbb{K}$はStiffness　matrixであり，$\mathbb{S}$および，Δはそれぞれ，外力，および，節点の変形量よりなる右のようなベクトルである．

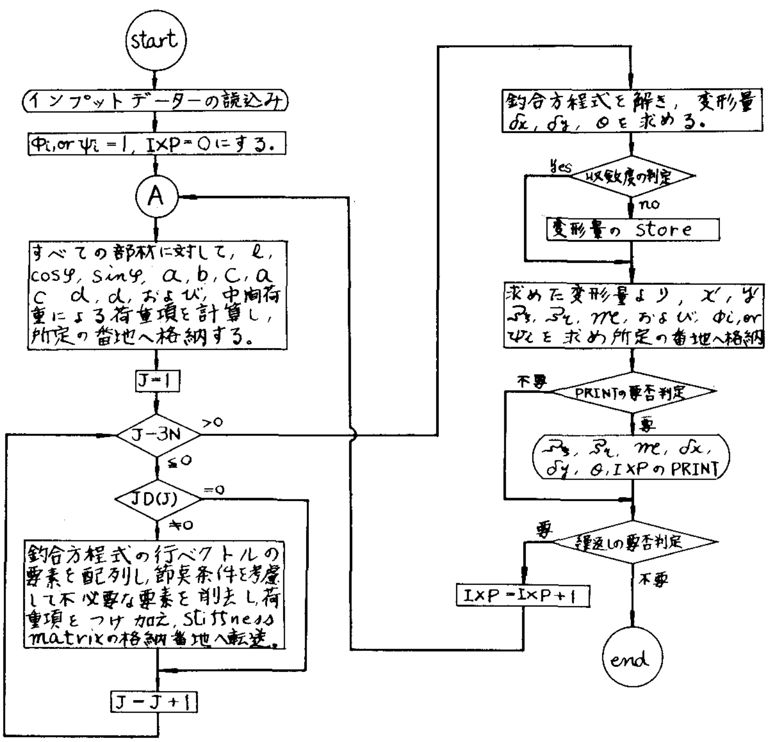
$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} P_{x1}\\ \vdots \\ P_{xN}\\ P_{y1}\\ \vdots\\ P_{yN}\\ M_1\\ \vdots\\ M_N \end{bmatrix} \qquad \Delta = \begin{bmatrix} \delta_{x1}\\ \vdots \\ \delta_{xN}\\ \delta_{y1}\\ \vdots\\ \delta_{yN}\\ \theta_1\\ \vdots\\ \theta_N \end{bmatrix}$$

さて，繰返しの方法であるが，まず最初は軸力の2次的影響，および，有限変位理論を考慮しない場合ϕ_i or $\psi_i = 1$，$\cos\varphi_{ij} = (x_j - x_i)/l_{ij}$，$\sin\varphi_{ij} = (y_j - y_i)/l_{ij}$，$l_{ij} = \{(x_j-x_i)^2 + (y_j-y_i)\}^{1/2}$)のStiffness　matrix $\mathbb{K}_0$を作り，式(3)に相当する釣合方程式$\mathbb{S} = \mathbb{K}_0\ \Delta$を解く．つぎには，求まった変形量と軸力から$\phi_i$, or ψ_i　および，l'_{ij}，$\cos'\varphi_{ij}$，$\sin'\varphi_{ij}$を求め新らたなStiffness matrix $\mathbb{K}_1$を作り，最初と同様に$\mathbb{S} = \mathbb{K}_1\cdot\Delta$を解き，$\phi_i$ or ψ_i，l'_{ij}，$\cos'\varphi_{ij}$，$\sin'\varphi_{ij}$を計算し，新らたにStiffness　matrix $\mathbb{K}_2$を求める。この操作を繰

返していくと変形量，および，材端力は一定値に近づく。そしてこの値が求める解である。

しかしながら，これらの計算は非常に煩雑であり，極く簡単な構造物に対しても卓上計算機でこれを解析することは不可能に近く，本理論に従がって構造物を解析するためには必ず電子計算機の力を借りなければならない。そこで，筆者は電子計算機，TOSBAC－3400（徳島大学電子計算機室）を対象にして，本理論式に従がって構造物を解析する場合の計算手順を，必要とされる若干のデーターを与えるだけで，電子計算機がすべて自動的に行ない，必要な，変形量，および，材端力を求めるようなプログラムの作制を試み完成したのでそのフローチャートをつぎに示す。なお，プログラムの詳細については講演会当日発表する。

5　フローチャート



6　計算例

計算例については講演会当日発表する。

7　参考文献

1）星　児嶋　平尾　　平面構造物の安定性に対する一計算について
第18回土木学会中国四国支部学術講演概要

2）藤野　大坂　　任意形式のツリ橋の静的構造解析法
三菱重工技報　VOL.3 NO.6．1966

3）東京芝浦電気株式会社　TOSBAC－3400システム説明書