

底面剪断力におよぼす底面曲率の影響について

徳島大学 正員 湯浅博明

1 概説 流水の河床面に働く剪断力を求める場合、河床面の横断方向の勾配がゆるやかに変化しているときは、水面に直角な方向に測った深さを水深として求める。しかし横断勾配が急にたつと底面に直角に測った深さを水深とした方が合理的であると考えられる。とくに自由表面を有する管の中の流れのような場合では水深をどのようなところのかよいかはつきりしない。また等速度線が既知の場合には等速度線に直角に測った深さを水深とする方法²⁾も考えられるが、不規則な断面における速度分布の一般的表示が十分に明らかでないため理論的な解析はかなり困難である。ここでは放物線断面、円形断面などのような曲線断面において底面曲率と底面剪断力との関係を理論的に求め、さらに放物断面、および矩形断面の2種の水路について実験を行ない、底面曲率が剪断力にどのような影響を及ぼすのかについて調べ既述結果と比較検討しなものである。また等速度線の仮定とフランドルの混合距離の理論を用いて底面曲率の影響を考慮した流速分布に因る近似式と等し、曲率が無限大の特殊な場合についての底面剪断力と種々変化させたときの実験結果と比較検討を行ない経路の影響をいかにして考察しなものである。

2 底面剪断力について 同様に示すように流水の中を任意断面を考へ、流水の方向に底面にそって x_1 、これに直角に横断方向に底面にそって x_2 、底面に直角な方向に x_3 軸をもつ直交座標系を考へ、また u_1, u_2, u_3 とそれぞれ x_1, x_2, x_3 軸方向の速度とする。底面工の任意点において、 dx_1, dx_2, dx_3 で圍まれた微小部分をとり、またこの点における曲率を K_1, K_2, K_3 とすれば微小面体の各辺の長さは図のように表わされる。今この微小面体において、剪断力は上下面のみに働かし、側面に働かぬものとして定し、下面に働く剪断力を $\tau_{x_1x_1} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \rho \overline{u_1 u_2}'$ とすれば上面に働く剪断力は $\tau_{x_1x_1} + \delta \tau_{x_1x_1} = \tau_{x_1x_1} + \frac{d\tau_{x_1x_1}}{dx_2} dx_2 = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \rho \overline{u_1 u_2}' + \frac{d}{dx_2} (\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \rho \overline{u_1 u_2}') dx_2$ となる。ここで u_1, u_2, u_3 はそれぞれ x_1, x_2, x_3 軸方向の断面流速、 ρ は水の密度、 μ は粘性係数である。また流れの定常状態を考へ、この微小面体に働く重力 g の流水の方向の成分は $\rho g \sin \theta$ であるから運動方程式は

$$(1 + K_2 dx_2) dx_1 dx_3 \left\{ \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \rho \overline{u_1 u_2}' + \frac{d}{dx_2} (\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \rho \overline{u_1 u_2}') dx_2 \right\} - dx_2 dx_3 \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \rho \overline{u_1 u_2}' \right) = \frac{(1 + K_2 dx_2) dx_2 + dx_2}{2} \cdot \frac{(1 + K_2 dx_2) dx_1 + dx_1}{2} dx_1 (-\rho g \sin \theta)$$

となり dx_1 かつ dx_3 微分を省略すれば

$$\frac{d}{dx_2} (\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \rho \overline{u_1 u_2}') + K_2 (\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \rho \overline{u_1 u_2}') = -\rho g \sin \theta \quad \dots \dots (1)$$

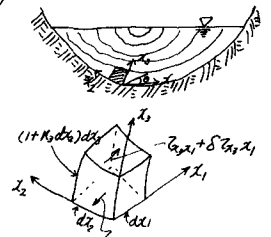
ii 等速度線の仮定と、フランドルの混合距離の考えを用いたものは

$$|u_1| = l \frac{du_1}{dx_2}, \quad |u_1| \sim |u_2| \sim |u_3| \quad \text{かつ} \quad \tau' = -\rho \overline{u_1 u_2}' = \frac{\rho}{\sqrt{2}} l^2 \frac{d^2 \bar{u}_{x_1x_1}}{dx_2^2}$$

となり式(1)に代入すれば $\frac{d}{dx_2} \left[\bar{u}_{x_1x_1} + \frac{\rho}{\sqrt{2}} l^2 \left(\frac{d^2 \bar{u}_{x_1x_1}}{dx_2^2} \right)^2 \right] + K_2 \left[\bar{u}_{x_1x_1} + \frac{\rho}{\sqrt{2}} l^2 \left(\frac{d^2 \bar{u}_{x_1x_1}}{dx_2^2} \right)^2 \right] = -\rho g \sin \theta$ となる。ここで

$p = \bar{u}_{x_1x_1} + \frac{\rho}{\sqrt{2}} l^2 \left(\frac{d^2 \bar{u}_{x_1x_1}}{dx_2^2} \right)^2$ とおくと $\frac{dp}{dx_2} + K_2 p + \rho g \sin \theta = 0$ となり、移項して変形し底面 $x_2 = 0$ で積分すれば $\int_0^{x_2} \frac{dp}{p + d} + p = \int_0^{x_2} -K_2 dx_2$ 中より $\log(p + d) = -K_2 x_2 + C$ となり、積分常数 C は底面 $x_2 = 0$ で $p = p_0 = [\bar{u}_{x_1x_1}]_0 - [\rho \overline{u_1 u_2}']_0 = [\bar{u}_{x_1x_1}]_0$ であるから $C = \log(p_0 + d)$ 、 $\therefore d = \rho g \sin \theta / K_2$ である。また $x_3 = H_2$ (水面) で $p = p_H = [\bar{u}_{x_1x_1}]_{H_2} - [\rho \overline{u_1 u_2}']_{H_2} = 0$ であるからこの式は $\log(1 + \frac{p}{d}) = K_2 H_2$ となり剪断力 τ は

$\bar{u}_{x_1x_1} = p = d \left(e^{K_2 H_2} - 1 \right) = \frac{\rho g \sin \theta}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{K_2 H_2}{1} + \frac{K_2^2 H_2^2}{2!} + \frac{K_2^3 H_2^3}{3!} + \dots - 1 \right) = \rho g \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2^{n-1}}{n!} H_2^n dx_2$ 1 であるから全断面にわたる剪断力 τ は $\tau = \int_S \bar{u}_{x_1x_1} dx_2 = \rho g \sin \theta \int_S \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2^{n-1}}{n!} H_2^n dx_2 = 2.5 H_2 x_2$ 軸方向の長さを表わす。この値をいふと



近似的に $\tau = \rho g \sin \theta \int_0^x (H_2 + \frac{x}{2} H_2' + \frac{x^2}{6} H_2'') dx_2$ となり曲率の影響を考慮した場合の剪断力が求められる。

3. 流速分布について 我々が日常取り扱小管路の流れとか、河川その他水路の流れはすべて乱流であつて、流れの模様が複雑なため、流の場合のように一般に理論的な取扱ができない。また自由表面の存在、水路壁による摩擦、水路断面形の影響などによって流速分布も異なってくる。ここでは横断方向の曲率による影響を見るためにつぎのように考えた。いま前出の式 $\int_0^{x_1} \frac{dp}{\frac{\rho g \sin \theta}{K_2} + p} = \int_0^{x_1} -K_2 dx_2$ の積分において $p_0 = [p]_{x_2=0}$ とすれば $\log \frac{p_0 + d}{p + d} = K_2 x_2 \therefore (p+d) = (p_0+d)e^{-K_2 x_2}$ これに $p = \bar{u}_{x_2} - f u_*' u_*' = \mu \frac{du_2}{dx_2} + f l^2 (\frac{du_2}{dx_2})^2$ を代入すれば $\mu \frac{du_2}{dx_2} + f l^2 (\frac{du_2}{dx_2})^2 + d = (p_0+d)e^{-K_2 x_2} \therefore \frac{du_2}{dx_2} = -\frac{\nu}{2l^2} \pm \sqrt{(\frac{\nu}{2l^2})^2 + \frac{f}{\mu} (p_0+d)e^{-K_2 x_2}}$ 粘性の項を無視し $\frac{du_2}{dx_2} > 0$ と考えれば $\frac{du_2}{dx_2} \div \frac{1}{l} \sqrt{\frac{p_0}{f}} e^{-\frac{K_2 x_2}{2}} \sqrt{1 + \frac{d}{p_0} - \frac{d}{p_0} e^{-K_2 x_2}}$ 一般に $K_2 x_2 \ll 1$ であるから $\frac{du_2}{dx_2} \div \frac{1}{l} \sqrt{\frac{p_0}{f}} e^{-\frac{K_2 x_2}{2}}$ となる。ここで J. Rotta の考えを用い混合距離 $l = l_0 + K x_2$ と置き x_2 について積分すると $\int_{x_0}^{x_2} d\bar{u}_2 = \sqrt{\frac{p_0}{f}} \int_{x_0}^{x_2} \frac{e^{-\frac{K_2 x_2}{2}}}{l_0 + K x_2} dx_2$ ここで h_1 は底面に極めて近い部分で、この点における l の値を l_0 とする。また K はカルマンの常数でその値は 0.47 である。この積分は $\bar{u}_{x_2} - \bar{u}_{h_1} = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{p_0}{f}} e^{\frac{K l_0}{2}} [\log \frac{l_0 + K x_2}{l_0 + K h_1} - r K (h_1 - x_2)]$, $r = \frac{K_2}{2}$, 底面における流速は 0 であるから $x_2 = 0$ で $\bar{u}_{x_2=0} = 0$ より $-\bar{u}_{h_1}$ の値を求め上式に代入すれば流速分布をよめる式 $\bar{u}_{x_2}$ は $\bar{u}_{x_2} = \frac{u_*'}{K} e^{\frac{K l_0}{2}} [\log (1 + \frac{K}{l_0} x_2) - \frac{K_2}{2} x_2]$ となる。また底面の曲率が 0 のときすなわち平面のときは $\bar{u}_{x_2} = \frac{u_*'}{K} \log (1 + \frac{K}{l_0} x_2)$ となる。粗面水路において l_0 の代りに平均粒径の高さ βk_0 を用いると $\bar{u}_{x_2}$ は $\bar{u}_{x_2} = \frac{1}{K} u_*' \log (1 + \frac{K}{\beta k_0} x_2) \dots \dots (2)$ と表はされる。ここで β は l_0 と k_0 との関係を表す比例常数であつて実験的に定められるものと考えられる。実験においては (2) 式の関係が粗度の変化したときどのようなになるかとしうべし。

4. 実験設備と方法 実験に用いた水路は長さ 8m, 中 36cm, 高さ 30cm の矩形断面の木製水路、および長さ 8m, 中 36cm, 高さ 20cm の放物断面とし、底面には粗面水路の剪断力および流速分布としうべいため種々の均一粒径 0.6~10mm の砂をワニスではりつけた。また流速測定はピトー管により、水面形状の測定には 1/10mm までのポイントゲージを用いた。この実験はどれも水路の勾配を 1/1000 とし流量を 0.5~5.5 l/s までは種々に変化させた。また底面の粗度が流速分布に及ぼす影響をみるために粒径を度へて行ない、水位、水深および流速分布の測定は皆水路の中心にそつて行なつた。

5. 実験結果と考察 三角形断面などのような底面曲率が無限大であるときは、曲率を考慮しない場合も、考慮した場合も理論的に同じ結果になるが、放物断面水路においては底面曲率の關係する。そこで底面曲率を考慮しない方法、底面曲率を考慮する方法、および等速度線に直角にとつた方法の3つについて比較した。次表は放物型断面で $y = \frac{1}{5} x^2$ である水路に $Q = 3.0 \text{ l/s}$ の流量を流して之を結果より求めたものであるが、この表より明らかになるように、曲率を考慮したとき、最小の剪断力をよめ、流速分布に直角に測つた方法が最大になることがわかる。右の粒径 k_0 と流速分布との關係については現在実験中なので講演時に述べる予定である。

剪断力の比較

砂の粒径 k_0	流量 Q	曲率を考慮しない場合	曲率を考慮した場合	流速分布に垂直の場合
$d = 0.6 \text{ mm}$				
	$Q = 3.0 \text{ l/s}$	112.806	97.169	119.096
		EC 1.000	EC 0.8414	EC 1.0557
$d = 1.2 \text{ mm}$				
	$Q = 3.0 \text{ l/s}$	122.026	104.530	130.174
		EC 1.000	EC 0.8566	EC 1.0667
$d = 2.5 \text{ mm}$				
	$Q = 2.9 \text{ l/s}$	124.002	105.952	125.659
		EC 1.000	EC 0.8564	EC 1.0133

12) H. Lundgren and Ivan G. Jansson, "Shear and velocity distribution in shallow channels" Proceeding of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division January 1964.
 3) Prandtl: Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. Zes. v. D. T. 77 (1933), Nr. 5.
 4) J. Rotta: "Das in Wandnhe gltige Geschwindigkeitsgesetz turbulent Stromungen," Ingenieur-Archiv, Band XVIII, 1950.