

平面剛滑節構造物の安定性の一計算について

徳島大学工学部 正員 星 治雄

〃 〃 恩嶋弘行

徳島大学大学院 学生員 〇平尾 潔

1 要旨

本研究は従来の変形法に軸力の2次的影響を導入して、一般的な平面剛滑節構造物の極限状態附近における安定性を解明する一計算法を提案したものである。

2 単一部材に対する基本式

図-1に示すように変位、および、材端力、材端モーメントの正方向はすべて座標に準ずるものとする。図-1においてξ軸を部材軸と一致させ、iに原点をもってすれば微かな座屈変形を生じた場合の基礎微分方程式は、つぎの式(1)のようになる。

$$EI \frac{d^4 \psi}{d\xi^4} = -m_{ij} + P_{ij} \psi - P_{ij} (\xi - d_i) \quad (1)$$

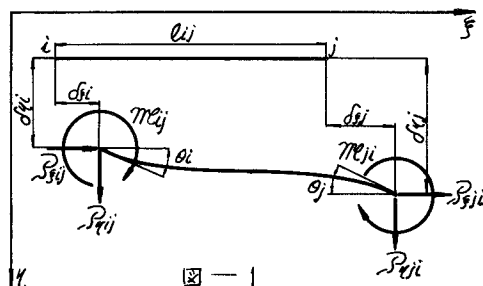


図-1

式(1)を解き境界条件、 $\xi = 0$ で、 $\psi = d_i$, $(d\psi/d\xi) = \theta_i$, $\xi = l$ で、 $\psi = d_j$, $(d\psi/d\xi) = \theta_j$ を代入すると、つぎの式(2), (3)が得られる。

$$P_{ij} = \frac{12EI_{ij}}{l_{ij}^3} (d_i - d_j) \left(\frac{\phi_3}{\psi_3} \right) + \frac{6EI_{ij}}{l_{ij}} (\theta_i + \theta_j) \left(\frac{\phi_2}{\psi_2} \right) \quad (2)$$

$$m_{ij} = \frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^2} (d_i - d_j) \left(\frac{\phi_2}{\psi_2} \right) + \frac{2EI_{ij}}{l_{ij}} \left\{ 2\theta_i \left(\frac{\phi_3}{\psi_3} \right) + \theta_j \left(\frac{\phi_4}{\psi_4} \right) \right\} \quad (3)$$

$$\text{ここで、} \phi_1 = (\lambda l \sin \lambda l) / 2(1 - \cos \lambda l)$$

$$\phi_2 = (\lambda^2 l^2)(1 - \cos \lambda l) / 6\{2(1 - \cos \lambda l) - \lambda l \sin \lambda l\}$$

$$\phi_3 = (3\phi_2 + \phi_1) / 4, \quad \phi_4 = (3\phi_2 - \phi_1) / 2, \quad \phi_5 = \phi_1 \times \phi_2$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{|P_{ij}|}{EI_{ij}}}$$

$$\psi_1 = (\lambda l \sinh \lambda l) / 2(\cosh \lambda l - 1)$$

$$\psi_2 = (\lambda^2 l^2)(1 - \cosh \lambda l) / 6\{2(\cosh \lambda l - 1) - \lambda l \sinh \lambda l\}$$

$$\psi_3 = (3\psi_2 + \psi_1) / 4, \quad \psi_4 = (3\psi_2 - \psi_1) / 2, \quad \psi_5 = \psi_1 \times \psi_2$$

また、軸方向力 P_{ij} は、つぎの式(4)のよう表わされる。

$$P_{ij} = \frac{EF_{ij}}{l_{ij}} (d_{\xi i} - d_{\xi j}) \quad (4)$$

ここで、 F_{ij} は ij 部材の部材断面積である。

以上の式(2), (3), (4)を x, y 座標に座標変換すると、つぎの基本式(5), (6), (7)が得られる。

$$P_{xij} = a_{ij} (d_{xi} - d_{xj}) + b_{ij} (d_{yi} - d_{yj}) - c_{ij} (\theta_i + \theta_j) \quad (5)$$

$$P_{yij} = b_{ij} (d_{xi} - d_{xj}) + a_{ij} (d_{yi} - d_{yj}) + c_{ij} (\theta_i + \theta_j) \quad (6)$$

$$m_{ij} = -c_{ij} (d_{xi} - d_{xj}) + c_{ij} (d_{yi} - d_{yj}) + d_{ij} \theta_i + \bar{d}_{ij} \theta_j \quad (7)$$

$$\text{ここで, } a_{ij} = \frac{EF_{ij}}{\ell_{ij}} \cos^2 \varphi_{ij} + \frac{12EI_{ij}}{\ell_{ij}^3} \left(\frac{\phi_5}{\psi_5} \right) \sin^2 \varphi_{ij}, \quad \bar{a}_{ij} = \frac{EF_{ij}}{\ell_{ij}} \sin^2 \varphi_{ij} + \frac{12EI_{ij}}{\ell_{ij}^3} \left(\frac{\phi_5}{\psi_5} \right) \cos^2 \varphi_{ij}$$

$$b_{ij} = \left\{ \frac{EF_{ij}}{\ell_{ij}} - \frac{12EI_{ij}}{\ell_{ij}^3} \left(\frac{\phi_5}{\psi_5} \right) \right\} \sin \varphi_{ij} \cos \varphi_{ij}, \quad C_{ij} = \frac{6EI_{ij}}{\ell_{ij}^2} \left(\frac{\phi_2}{\psi_2} \right) \sin \varphi_{ij}$$

$$\bar{C}_{ij} = \frac{6EI_{ij}}{\ell_{ij}^2} \left(\frac{\phi_2}{\psi_2} \right) \cos \varphi_{ij}, \quad d_{ij} = \frac{4EI_{ij}}{\ell_{ij}} \left(\frac{\phi_3}{\psi_3} \right), \quad \bar{d}_{ij} = \frac{2EI_{ij}}{\ell_{ij}} \left(\frac{\phi_4}{\psi_4} \right)$$

ここで, φ_{ij} は ij 部材と x 軸とのなす角度である。

なお, 式中 (ϕ_i) とあるのは, 軸方向力 P_{ij} が正 (圧縮力) の場合は ϕ_i と, 負 (引張力) の場合は ϕ_i と用いることを表わしている。

3 基本方程式の一般平面剛節構造物への適用方法

これは参考文献¹⁾の機械的作表法の作表法一の, $N \times 9$ 行目の $2d \times d$ に, $d \in \bar{d}$ に変えるだけで全く同一であるからこれを参考にしたい。

4 与えられた荷重に対する解, および, 限界荷重の求め方

1) 与えられた荷重に対する解の求め方

軸力の二次的影響を考慮した場合は, 軸力と変形量が非線型関係を示すからつぎのような繰返し漸進法によって解を求めなければならない。一般に N 個の節点からなる構造物の stiffness matrix は $3N$ 元 (ただし, 変位も含めた節点の条件によっては省略されるものもあるので通常それ以下となる。) となり, 釣合方程式はつぎの式 (8) のように表わされる。

$$S = K \cdot \Delta \quad (8)$$

ここで, K は stiffness matrix であり, S , および, Δ はそれぞれ, 外力, および, 節点の変形量よりなる, 右の式 (9), (10) のようなベクトルである。

さて, 繰返しの方法であるが, まず最初は軸力の二次的影響を考慮しない場合 (式中の ϕ_i , あるいは, ψ_i が 1 となる。) の stiffness matrix K_0 を作り, 式 (8) に相当する釣合方程式, $S = K_0 \cdot \Delta$ を解く。求まった軸力より, ϕ_i , または, ψ_i を計算し新たに stiffness matrix K_i を作り最初と同様に,

$S = K_i \cdot \Delta$ を解き, ϕ_i , または, ψ_i を計算する。この操作を繰返ししていくと, 変形量, および, 部材が一定値に近づく。そして, この値が求める解である。

2) 限界荷重の決定法

任意定数 k を, 任意の荷重系 P とすると, 1) で述べた方法により, kP なる荷重系が作用した場合の変形量を求める。この k の種々な値に対応する代表的な変形量 δ の逆数 $1/\delta$ を求め, 縦軸に k と, 横軸に $1/\delta$ ととり, k に対応する δ をプロットしていくと曲線が描かれる。そして, この曲線が縦軸を切る時の k の値が求める荷重倍率であり, kP が求める限界荷重である。

以上のことを換言すれば限界荷重 kP の k の値は変形量が無限大となる k の最小値であるから, この k の値は, k に関するつぎの式 (11) の根の k の最小値としても求められる。

$$S = \begin{pmatrix} P_{x1} \\ \vdots \\ P_{xN} \\ P_{y1} \\ \vdots \\ P_{yN} \\ M_1 \\ \vdots \\ M_N \end{pmatrix} \quad (9) \quad \Delta = \begin{pmatrix} \delta_{x1} \\ \vdots \\ \delta_{xN} \\ \delta_{y1} \\ \vdots \\ \delta_{yN} \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$K(k) = 0 \quad (11)$$

ここで、 $K(k)$ は荷重系 P が作用したときの式(8)の K に相当する Stiffness matrixである。

ところで、式(11)は k に関する超越函数であるから、これを直接解くことは不可能である。そこで、 k の種々な値に対する $K(k)$ の正負によって k の範囲を必要な精度までせばめてやると $K(k) = 0$ となるような k の近似値を求める。

このように Stiffness matrixの正、負によって、平面剛滑節構造物の安定性が判定できるということはこの数値解析に電子計算機を利用する上で大変重要となってくる。

5 計算例

計算例としては、図-2に示すような門型ラーメン($h=l$ 、各部材とも等断面)について、つぎの、(1)~(3)の数値解析を電子計算機、TOSBAC-3400(徳島大学電子計算機室)を使用して行なはれた。

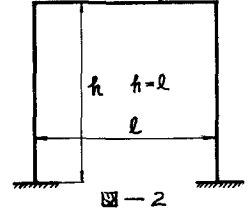


図-2

1) 一定荷重系のもとで断面性状(F, I)を変化させた場合。

2) 一定断面性状のもとで荷重系を図-3に示す、(1)~(3)まで変化させた場合。

3) 一定断面性状、一定荷重系のもとで部材長を変化させた場合。

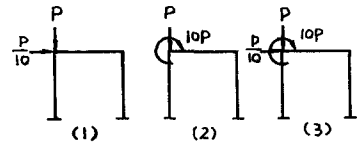


図-3

なお、以上の計算結果の詳細については、講演会当日発表する。

6 参考文献

- 1) 成田, 児嶋, 竹内 変形法による合成トラスの解析について 道路, 通巻259号(昭和39.7)
- 2) R. K. Livesley The Application of an Electronic Digital Computer to Some Problem of Structural Analysis (1956)
- 3) 児嶋弘行 電子計算機による立体トラスの解析に関するプログラミングについて。徳島大学工学部研究報告 NO9, 1964
- 4) 東京芝浦電気株式会社 TOSBAC-3400 システム説明書