

概要

この報告は、平面滑節トラスの格点変位の計算に Reduction 法の考え方を導入して、トラスを構成する単位三角形の頂点の変位と、あらかじめ計算された部材力とを用いて、マトリックス演算によって、すべての格点の水平、および、垂直変位を、端からはじめて順次計算してゆく、一計算法を提案したものである。この方法は、一個の単位三角形の中に、その三角形の頂点以外の格点をもつトラスのような構造以外であれば、トラスの静定、不静定の如何を問わず適用することができる。

1 単位三角形の頂点の変位の相互関係

図-1に示すような、 XY 面内にある平面トラスの単位三角形について、その頂点の X 方向の分変位を U 、 Y 方向の分変位を V 、とし、それぞれの正の向きは、各軸の正の向きと一致させるものとする。いま、このような単位三角形について、頂点 i の分変位 U_i 、 V_i と、頂点 j 、および、 k の分変位 U_j 、 V_j 、 U_k 、 V_k との関係を、無次元表示すれば、式-1のようになる。ただし、式-1において、

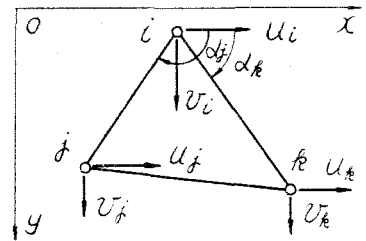


図-1 単位三角形

N :— 部材の軸方向力 (引張力を正とする),

F :— 部材の断面積,

α :— 部材と X 軸とのなす角 (図-1のように測ったものを正とする), である。

$$U_i^* = -\operatorname{cosec}(\alpha_j - \alpha_k) \{ (\cos \alpha_j \sin \alpha_k) U_j^* + (\sin \alpha_j \sin \alpha_k) V_j^* - (\sin \alpha_j \cos \alpha_k) U_k^* - (\sin \alpha_j \sin \alpha_k) V_k^* + \sin \alpha_j (F_c \cdot l_{ik} / F_{ik} \cdot l_c) N_{ik}^* - \sin \alpha_k (F_c \cdot l_{ij} / F_{ij} \cdot l_c) N_{ij}^* \},$$

$$V_i^* = \operatorname{cosec}(\alpha_j - \alpha_k) \{ (\cos \alpha_j \cos \alpha_k) U_j^* + (\sin \alpha_j \cos \alpha_k) V_j^* - (\cos \alpha_j \cos \alpha_k) U_k^* - (\cos \alpha_j \sin \alpha_k) V_k^* + \cos \alpha_j (F_c \cdot l_{ik} / F_{ik} \cdot l_c) N_{ik}^* - \cos \alpha_k (F_c \cdot l_{ij} / F_{ij} \cdot l_c) N_{ij}^* \}.$$

————— (1)

$$\text{ただし、 } U^* = (EF_c / P_c \cdot l_c) \cdot U, \quad V^* = (EF_c / P_c \cdot l_c) \cdot V, \quad N^* = N / P_c. \quad \text{————— (2)}$$

F_c :— 基準部材の断面積, l_c :— 基準部材の部材長, P_c :— 基準外力, である。

式-1において、 N に関する項は、各部材の軸力が計算されているものとすれば、定数項となり、結局、式-3のようにマトリックス表示できる。

$$\begin{pmatrix} U_i^* \\ V_i^* \end{pmatrix} = \operatorname{cosec}(\alpha_j - \alpha_k) \begin{pmatrix} -C_j S_k - S_j S_k & S_j C_k & S_j S_k & -N_s^* \\ C_j C_k & S_j C_k - C_j C_k & -C_j S_k & N_c^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_j^* \\ V_j^* \\ U_k^* \\ V_k^* \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{————— (3)}$$

$C_j = \cos \alpha_j,$
 $C_k = \cos \alpha_k,$
 $S_j = \sin \alpha_j,$
 $S_k = \sin \alpha_k.$

$$\text{ただし、 } \left. \begin{aligned} N_s^* &= \sin \alpha_j (F_c \cdot l_{ik} / F_{ik} \cdot l_c) N_{ik}^* - \sin \alpha_k (F_c \cdot l_{ij} / F_{ij} \cdot l_c) N_{ij}^*, \\ N_c^* &= \cos \alpha_j (F_c \cdot l_{ik} / F_{ik} \cdot l_c) N_{ik}^* - \cos \alpha_k (F_c \cdot l_{ij} / F_{ij} \cdot l_c) N_{ij}^*. \end{aligned} \right\} \quad \text{————— (4)}$$

2 格点変位の計算法

トラスは、さきの単位三角形の組み合わせによって構成されているから、式 3 を各単位の滑節三角形に適用することによって、各格点相互の変位の関係を知ることができる。したがって、ある単位三角形の二格点の変位が既知であれば、これからはじめて、この三角形と任意の二格点を共有する隣接した単位三角形の格点変位を知ることができ、これを順次継続することによって、トラス全体の格点の変位をすべて計算することができる。この際、スタートする単位三角形の二つの格点変位は、必ずしも全部既知でなくてもよい。例えば、図-2 のよう

なトラスの場合、①の三角形からスタートするとすれば、 $U_0^* = V_0^* = 0$ 、であり、また、 U_1^* については

$$U_1^* = (N_{or1}/E F_{or1}) (E F_c / P_c \cdot l_c) = (F_c l_{or1} / F_{or1} l_c) N_{or1}$$

によって計算できるが、 V_1^* は一般に直接知ることは

できない。しかし、この場合も V_1^* を未知数として含めたまゝ、一応式-3 を、①→②→③の順に適用して、各格点の変位を、 V_1^* の関数として求めておいて、最後に、支点9の条件、すなわち、

$U_9^* \sin \alpha - V_9^* \cos \alpha = 0$ 、から V_1^* を決定し、この値をさきの結果に代入して確定値を得ることができる。計算手順の詳細については、以下の計算例によって御覧察いただきたい。

3 計算例

図-3 のような、ワーレントラスについて計算する。基準部材を 0-1 ととり、基準外力を $P=10t$ とする。各部材の軸力は容易に計算できるから、式-4 の計算の便のため、下のような表を作っておき、計算は①→②→③の順に進める。

単位三角形 ①

$U_0^* = V_0^* = 0$ 、 $U_1^* = 1 \cdot N_{or1}^* = 3/8$ 、であるから、図-1 における $j=0$ 、 $k=1$ 、 $i=2$ 、とすれば、

$$S_j = 4/5, S_k = 4/5, C_j = -3/5,$$

$$C_k = 3/5, \operatorname{cosec}(\alpha_0 - \alpha_1) = 25/24, \text{したがって、}$$

$$\begin{bmatrix} U_2^* \\ V_2^* \end{bmatrix} = \frac{25}{24} \begin{bmatrix} \frac{12}{25} & -\frac{16}{25} & \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & -\frac{35}{24} \\ -\frac{9}{25} & \frac{12}{25} & \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & \frac{5}{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1^* \\ V_1^* \\ U_1^* \\ V_1^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{767}{576} \\ \frac{1}{2} & -\frac{17}{768} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1^* \\ 1 \end{bmatrix}$$

単位三角形 ② $i=3, j=1, k=2$ として、 $S_j=4/5, S_k=0, C_j=-3/5, C_k=-1, \operatorname{cosec}(\alpha_1 - \alpha_2)=-5/4$ 、

$$\begin{bmatrix} U_3^* \\ V_3^* \end{bmatrix} = -\frac{5}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & \frac{179}{120} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1^* \\ V_1^* \\ U_2^* \\ V_2^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & 1 & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{179}{96} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{8} \\ 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{767}{576} \\ \frac{1}{2} & -\frac{17}{768} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1^* \\ 1 \end{bmatrix}$$

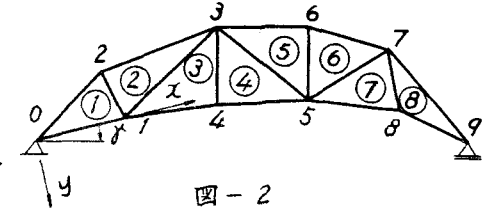


図-2

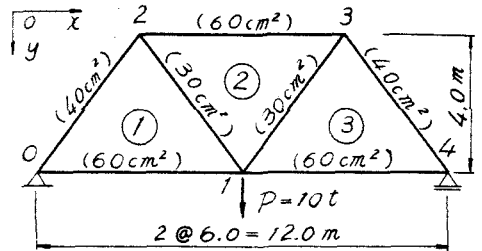


図-3 計算例

部材	N	N*	F _c /F	l/l _c	(F _c l/F _c l _c)N*
0-1, 1-4	15/4	3/8	1	1	3/8
0-2, 3-4	-25/4	-5/8	3/2	5/6	-25/32
1-2, 1-3	25/4	5/8	2	5/6	25/24
2-3	-15/2	-3/4	1	1	-3/4

$$-\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1199}{576} \\ \frac{3}{2} & -\frac{2415}{768} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1^* \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{単位三角形 ③ } i=4, j=1, k=3 \text{ とみなせば,}$$

$$S_i=0, S_k=-4/5, C_j=-1, C_k=-3/5, \operatorname{cosec}(\alpha_1-\alpha_3)=-5/4.$$

$$\begin{bmatrix} u_4^* \\ v_4^* \end{bmatrix} = -\frac{5}{4} \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{161}{160} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^* \\ v_1^* \\ u_3^* \\ v_3^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} \\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 1 & -\frac{161}{128} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{8} \\ 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1199}{576} \\ \frac{3}{2} & -\frac{2415}{768} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1^* \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ 2 & -\frac{4796}{768} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1^* \\ 1 \end{bmatrix}$$

この値から、 v_1^* を決定することができる。すなわち、支桌4において鉛直変位が0と云う条件から、

$v_4^* - 2v_1^* - 4796/768 = 0$, したがって、 $v_1^* = 1199/384$, が得られる。この値を、さきに求めたものに代入して、各格梁の変位を以下のように得る。

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \frac{Pc \cdot l_c}{E \cdot F_c} \begin{bmatrix} u_1^* \\ v_1^* \end{bmatrix} = \frac{100}{E} \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1199}{384} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \frac{100}{E} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} - \frac{767}{576} \\ \frac{1}{2} - \frac{17}{768} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1199}{384} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{100}{E} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{197}{128} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \frac{100}{E} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} - \frac{1199}{576} \\ \frac{3}{2} - \frac{2415}{768} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1199}{384} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{100}{E} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{197}{128} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \frac{100}{E} \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ 2 & -\frac{4796}{768} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1199}{384} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{100}{E} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

以上の計算過程は、以下のような計算形式にまとめることができる。

○ — $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ 定数項に乘すべき行ベクトル。

$$\frac{Pc \cdot l_c}{E \cdot F_c} = \frac{10 \times 600}{E \times 60} = \frac{100}{E}$$

$$\textcircled{1} = \frac{25}{24} \begin{bmatrix} \frac{12}{25} - \frac{16}{25} & \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & -\frac{35}{24} \\ -\frac{9}{25} & \frac{12}{25} & \frac{9}{25} & \frac{12}{32} \end{bmatrix},$$

$$\textcircled{2} = -\frac{5}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & \frac{179}{120} \end{bmatrix},$$

$$\textcircled{3} = -\frac{5}{4} \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{161}{160} \end{bmatrix}.$$

$$\textcircled{4} \quad 2v_1^* - 4796/768 = 0, \therefore v_1^* = 1199/384.$$

$$\begin{array}{l} v_1^* \quad 1 \\ \begin{bmatrix} u_0^* \\ v_0^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \therefore \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \frac{100}{E} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} u_1^* \\ v_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{8} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1199}{384} \end{bmatrix} \rightarrow \therefore \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \frac{100}{E} \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1199}{384} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} u_2^* \\ v_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} - \frac{767}{576} \\ \frac{1}{2} - \frac{17}{768} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{197}{128} \end{bmatrix} \rightarrow \therefore \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \frac{100}{E} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{197}{128} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} u_3^* \\ v_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} - \frac{1199}{576} \\ \frac{3}{2} - \frac{2415}{768} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{197}{128} \end{bmatrix} \rightarrow \therefore \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \frac{100}{E} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{197}{128} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} u_4^* \\ v_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ 2 & -\frac{4796}{768} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \therefore \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \frac{100}{E} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{array}$$

4 結 語

ここで提案した計算法は、変形と部材力が同時に計算できない梁が Reduction 法と異なった梁であり、欠梁とも云える。この解決法については今後研究を進める予定である。