第Ⅱ部門　　二次元線形化浅水流方程式の境界条件に適合した離散式と計算法に関する一考察

フェロー　　細田　尚

１．はじめに

二次元線形化浅水流方程式は，これまでに連続蛇行水路や波状路床上の流れ等，空間方向に周期的な流れの解析に適用され，開水路流れの基本的な特性を理解するために有効に用いられてきた．一方，二次元線形化浅水流方程式を上下流端で与えられた水深・流速分布に関する境界条件の下で解いた例は少ないが，細田・音田・白井・岩見 [1]は曲率半径の小さい湾曲水路の下流側に続く直線水路内の急な流れの遷移過程を基礎式の基本解を用いて表現している．

細田等 [1]の研究を解釈すると，上下流端で境界条件として与える水深と流速分布の種々の組合せの下で水理量の解が存在することが分かる．一方，現在用いられている平面二次元河川流解析法では，そのような種々の境界条件の組合せを適用することはできず，通常は上流端で流れ方向の流速（流量フラックス），下流端で水深を与えるとともに横断流速をゼロと仮定することが多い．そこで本研究では，常流を対象としたより柔軟な平面二次元流解析を行うための準備として，種々の上下流端境界条件の下で二次元線形化浅水流方程式の数値解析を行う方法について基礎的な検討を行う．

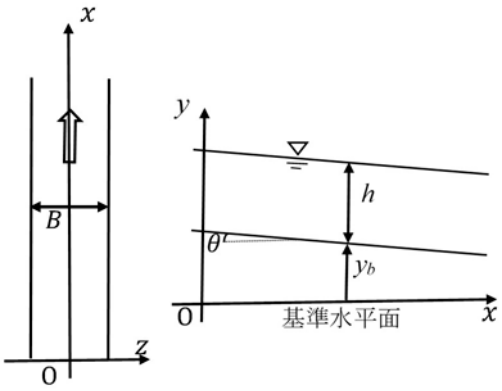
２．基礎式とその無次元化

図−1 に示した水平面上に$x-z$軸を置いた座標系の下で，路床が平坦な場合の平面二次元流の基礎式を示せば以下のようになる．

$$h\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial h}{\partial x}+h\frac{\partial w}{\partial z}+w\frac{\partial h}{\partial z}=0 \tag{1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}+g\frac{\partial h}{\partial x}=-g\frac{\partial y_b}{\partial x}-c_f\frac{\sqrt{u^2+w^2}\ u}{h} \tag{2}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}+g\frac{\partial h}{\partial z}=\quad -c_f\frac{\sqrt{u^2+w^2}\ w}{h} \tag{3}$$



図−1 座標系と記号の説明

ここに，(x,z)は空間座標，(u,w)は水深平均流速ベクトルの成分，hは水深，gは重力加速度，y_bは基準水平面からの路床標高，c_fは摩擦係数．また，$\tan\theta=-\partial y_b/\partial x$ である．

式(4)で等流水深h_0と等流流速U_0，式(5)で水深偏差と流速偏差を定義する．

$$gh_0\tan\theta=c_f{U_0}^2 \tag{4}$$

$$h=h_0+\delta h,\ u=U_0+\delta u,\ w=\delta w \tag{5}$$

式(5)を基礎式系に代入し，偏差に関する線形化方程式を式(6)で定義される無次元変数で表すと式(7)-(9)となる．

$$\delta u'=\frac{\delta u}{U_0},\delta w'=\frac{\delta w}{U_0},\delta h'=\frac{\delta h}{h_0},x'=\frac{x}{h_0},z'=\frac{z}{B/2} \tag{6}$$

$$\frac{\partial\delta u'}{\partial x'}+\frac{\partial\delta h'}{\partial x'}+\frac{h_0}{B/2}\frac{\partial\delta w'}{\partial z'}=0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial\delta u'}{\partial x'}+\frac{gh_0}{{U_0}^2}\frac{\partial\delta h'}{\partial x'}=\frac{gh_0}{{U_0}^2}\tan\theta\cdot\delta h'-2c_f\delta u' \tag{8}$$

$$\frac{\partial\delta w'}{\partial x'}+\frac{gh_0}{{U_0}^2}\frac{h_0}{B/2}\frac{\partial\delta h'}{\partial z'}=-c_f\delta w' \tag{9}$$

式(9)をz'で偏微分した式(10)に式(7)を代入すると式(11)になる．

$$\frac{\partial^2\delta w'}{\partial x'\partial z'}+\frac{a_s}{Fr_0^2}\frac{\partial^2\delta h'}{\partial z'^2}=-c_f\frac{\partial\delta w'}{\partial z'} \tag{10}$$

$$-\frac{1}{a_s}\frac{\partial^2\delta u'}{\partial x'^2}-\frac{1}{a_s}\frac{\partial^2\delta h'}{\partial x'^2}+\frac{a_s}{Fr_0^2}\frac{\partial^2\delta h'}{\partial z'^2}=\frac{c_f}{a_s}\frac{\partial\delta u'}{\partial x'}+\frac{c_f}{a_s}\frac{\partial\delta h'}{\partial x'} \tag{11}$$

式(8)をx'で偏微分した式(12)を式(11)に代入すると式(13)になる．

$$\frac{\partial^2\delta u'}{\partial x'^2}+\frac{1}{Fr_0^2}\frac{\partial^2\delta h'}{\partial x'^2}=c_f\frac{\partial\delta h'}{\partial x'}-2c_f\frac{\partial\delta u'}{\partial x'} \tag{12}$$

$$\frac{1}{a_s}\left(\frac{1}{Fr_0^2}-1\right)\frac{\partial^2\delta h'}{\partial x'^2}+\frac{a_s}{Fr_0^2}\frac{\partial^2\delta h'}{\partial z'^2}-2\frac{c_f}{a_s}\frac{\partial\delta h'}{\partial x'}=-\frac{c_f}{a_s}\frac{\partial\delta u'}{\partial x'} \tag{13}$$

ここに，フルード数Fr_0と形状比 a_sの定義は $Fr_0=U_0/\sqrt{gh_0}$，$a_s=h_0/(B/2)$である．

$\delta h'$と$\delta u'$を未知量として，式(8)と式(13)が本研究で用いる基礎式となる．参考のため，両式から$\delta u'$を消去して$\delta h'$のみの関係式を示せば式(14)となる．本研究で対象とする常流れの場合には混合型に分類される

$$\left(\frac{1}{Fr_0^2}-1\right)\frac{\partial^3\delta h'}{\partial x'^3}+\frac{{a_s}^2}{Fr_0^2}\frac{\partial^3\delta h'}{\partial x'\partial z'^2}+c_f\left(\frac{1}{Fr_0^2}-4\right)\frac{\partial^2\delta h'}{\partial x'^2}+2c_f\frac{{a_s}^2}{Fr_0^2}\frac{\partial^2\delta h'}{\partial z'^2}-3{c_f}^2\frac{\partial\delta h'}{\partial x'}=0 \tag{14}$$

Takashi HOSODA,　hosoda.takashi.82c@st.kyoto-u.ac.jp

３．小路盤を用いた境界条件に適合した離散式の検討

式(8)と式(13)を種々の上下流端境界条件の下で数値解析するために，小路盤（少数セル）を用いて境界条件に適合した離散式を検討する．本研究では最小のセルとして**図-2** に示す 2×2 セルを考える．ただし，図を簡潔にするために座標原点を流れの領域の左下隅に移動させた．

本研究では，上下流端境界条件として細田・音田・白井・岩見[1]が理論的検討を行った湾曲水路下流直線部の流れと同様に，上流端で水深と主流方向流速，下流端で水深を与える場合の解析法を検討する．**図-2** にその境界条件の組合せに適合する水理量の配置を示した．ただし，水路側壁での境界条件は$\delta w' = 0$を式(9)に代入して得られる$\partial \delta h' / \partial z' = 0$である．

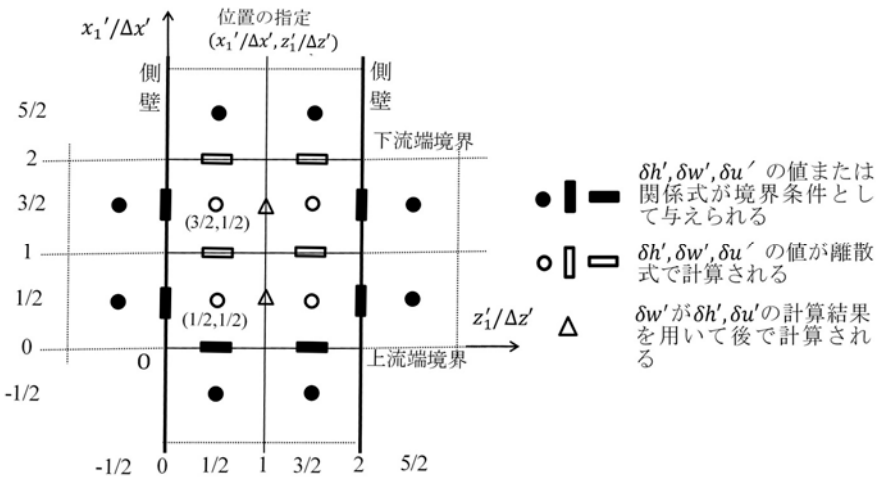


図-2 水理量の定義位置と計算法の説明図

図-2 に適合する式(8)と式(13)の離散式の一例を式(15)，式(16)に示した．

$$\text{式(13)}: \frac{1}{a_s}\left(\frac{1}{{Fr_0}^2}-1\right)\frac{\delta h'_{3/2,1/2}-2\delta h'_{1/2,1/2}+\delta h'_{-1/2,1/2}}{\Delta x'^2}+\frac{a_s}{{Fr_0}^2}\frac{\delta h'_{1/2,3/2}-2\delta h'_{1/2,1/2}+\delta h'_{1/2,-1/2}}{\Delta z'^2}$$

$$-2\frac{c_f}{a_s}\frac{\delta h'_{3/2,1/2}-\delta h'_{-1/2,1/2}}{2\Delta x'}=-\frac{c_f}{a_s}\frac{\delta u'_{1,1/2}-\delta u'_{0,1/2}}{\Delta x'} \tag{15}$$

$$\text{式(8)}: \frac{\delta u'_{1,1/2}-\delta u'_{0,1/2}}{\Delta x'}+\frac{1}{{Fr_0}^2}\frac{\delta h'_{3/2,1/2}-\delta h'_{-1/2,1/2}}{2\Delta x'}=c_f\delta h'_{1/2,1/2}-2c_f\frac{\delta u'_{1,1/2}+\delta u'_{0,1/2}}{2} \tag{16}$$

離散式は連立方程式を構成する．紙面の都合により計算法の詳細は記述しないが，本研究では連立方程式を直接解かず逐次近似法による収束計算により解を求めた．

4. 数値解析の条件と計算結果

数値解析に用いた水理条件と計算条件は以下の通りである．境界条件は曲率半径が小さい湾曲水路下流直線部の流れの特性を表すように与えている．

$Fr_0 = 0.3,\ a_s = 0.2,\ c_f = 0.005,\ \Delta x' = 5,\ \Delta z' = 1$

流速の上流端境界条件

$\delta u'_{0,1/2} = 0.3,\ \delta u'_{0,3/2} = -0.3$

水深の上下流端境界条件

$\delta h'_{-1/2,1/2} = -0.1,\ \delta h'_{-1/2,3/2} = 0.1,$

$\delta h'_{5/2,1/2} = 0,\ \delta h'_{5/2,3/2} = 0$

計算結果を**図-3** に示した．水深の横断分布は急に一様化するが流速分布は左右岸の大きさが逆転する様子が再現されている．

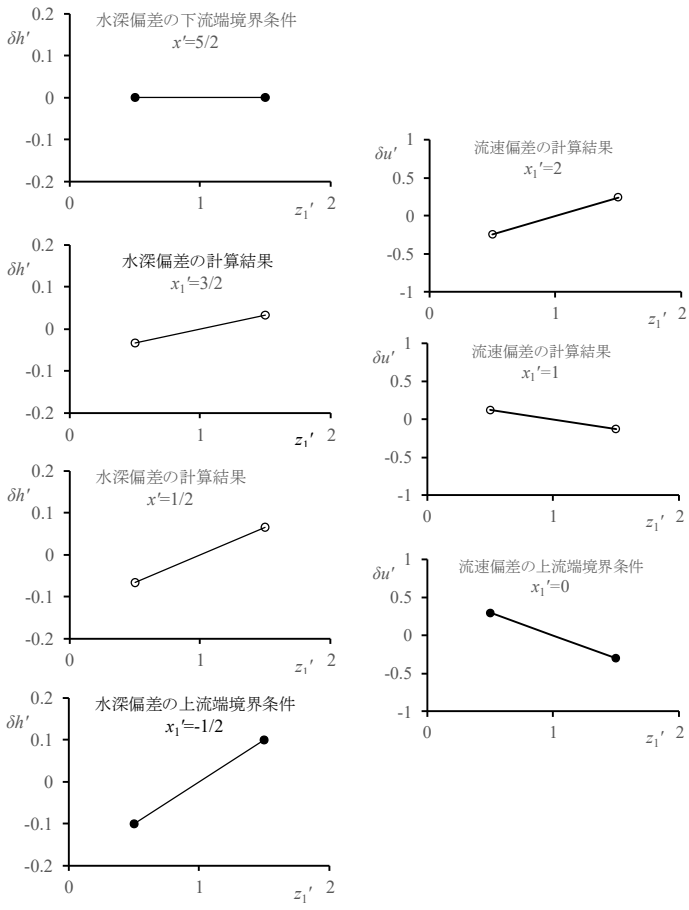


図-3 水深偏差と流速偏差の計算結果

5. おわりに

今後，種々の境界条件の下で領域を大きくした計算を行うことで計算法を確立したいと考えている．

参考文献 1) 細田　尚・音田慎一郎・白井秀和・岩見収二，曲率半径の小さい湾曲水路流の下流側直線部における流速・水深横断分布の遷移特性，第 28 回応用力学シンポジウム講演概要, 22001-07-04, 2026.