

京都大学大学院工学研究科 学生員 ○岡川 あい  
 京都大学大学院工学研究科 正会員 橋本 涼太  
 京都大学大学院工学研究科 正会員 肥後 陽介

## 1. はじめに

連続体の大変形解析手法として近年、粒子法と格子法のハイブリッド手法である Material Point Method (MPM)<sup>1)</sup>の開発・適用が進んでいる。計算格子節点の運動学的変数を未知数とする通常の MPM では、変位型有限要素法と同じく非圧縮性材料を扱う際体積ロッキングが発生する。そのため B-bar 法<sup>2)</sup>などの対策が提案されているが、B-bar 法では常に要素中心で体積ひずみを評価するため、粒子が要素間を移動する MPM に適用する上で課題がある。具体的には、変位－ひずみ関係を既定する B マトリックスの体積成分が要素間で不連続になるため応力分布に振動が生じ、斜面表面など粒子の分布が偏っている要素で地盤の形状が適切に表現されないといった問題が発生する。

以上の課題を解消するため、筆者らは陰的 MPM における新たな体積ロッキング対策として、節点の未知数に変位に加えて体積ひずみを導入し、運動量保存則と体積ひずみ速度の定義式を連立して解く混合型定式化 ( $\mathbf{u}-\varepsilon_v$  定式化) を提案した<sup>3)</sup>。さらに、粒状体である地盤を模擬したアルミ棒積層体の自重崩壊実験の再現解析を通じて、本手法は B-bar 法に比べ平均応力分布の滑らかさや到達距離の再現性に優れることを示した。

本稿では、この  $\mathbf{u}-\varepsilon_v$  定式化における安定化パラメータの選定や空間解像度が解析結果に与える影響について、体積ロッキングの影響が支配的となる典型的な問題の一つである片持ち梁の曲げ解析を通じて検討する。

## 2. MPM における $\mathbf{u}-\varepsilon_v$ 定式化の概要

MPM では解析対象の連続体を粒子に分割する。節点変数を未知数として支配方程式の弱形式を解き、節点との間でマッピングと補間を繰り返しながら粒子が物理量を輸送することで大変形を表現する。本研究で導入する  $\mathbf{u}-\varepsilon_v$  定式化では、運動量保存則に加えて体積ひずみ速度の定義式、

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} - \dot{\varepsilon}_v = 0 \quad (1)$$

を支配方程式とし、節点の未知数に変位  $\mathbf{u}$  の他に体積ひずみ  $\varepsilon_v$  を与え、要素の自由度を上げて体積ロッキングを解消する。各支配方程式の弱形式に空間離散化と時間離散化を施し、両者を連立して解く一体型解法を採用する。

一体型解法に基づく混合型定式化で各未知数が同じ節点に与えられている場合、解の一意性に関する条件である inf-sup 条件が満たされず数値不安定性が発生する。 $\mathbf{u}-\varepsilon_v$  定式化では式(1)を以下のように修正する安定化を行う。

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} - \dot{\varepsilon}_v + \frac{\alpha h^2}{\mu} K_V \nabla^2 \dot{\varepsilon}_v = 0 \quad (2)$$

ここで  $h$  は要素サイズ、 $\mu$  はラメ定数、 $K_V$  は体積弾性係数である。安定化パラメータ  $\alpha$  は問題に応じて適切な値を選ぶ必要がある。運動量保存則と式(2)の弱形式を MPM で空間離散化した後、前者を Newmark- $\beta$  法で、後者を後退 Euler 法で時間離散化することで変位と体積ひずみの増分を未知数とする解くべき剛性方程式を得る。本研究では計算格子に二次元正方格子を用い、補間関数として変位には二次 B-spline 基底関数、体積ひずみには線形補間を用いた。粒子－格子間の運動量の投影・補間は FLIP スキームで行い、非線形方程式の解法として Newton-Raphson 法を用いた。

## 3. 弾性梁の曲げ問題における安定化パラメータの影響について

### (1) 解析モデルと解析条件

二次元平面ひずみ条件における梁の曲げ解析は、体積ロッキングの影響を強く受ける典型例である。本研究では、 $\mathbf{u}-\varepsilon_v$  定式化を導入した MPM の性能を検証するため、図-1 に示すように先端に 1 kN の下向き荷重を受ける片持ち梁を対象とした解析を実施した。

空間解像度の影響を検討するため、梁を水平方向に  $2n$  分割、鉛直方向に  $n$  分割し ( $n=2, 4, 8, 16$ )、縦横比を一定に保ったまま要素サイズを変化させた。各要素に初期状態で  $2 \times 2$  個の粒子を配置し、固定端中心 1 点を

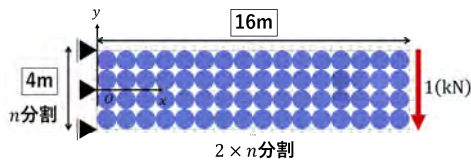


図-1 解析モデル

水平・鉛直両方向に拘束，それ以外の端部は水平方向のみ拘束した．解析は慣性項を無視した静的条件で行う．荷重は梁先端全体に等分布荷重として与えた．

体積ロッキングの影響を検討するため，材料がほぼ非圧縮となるよう平面ひずみ条件を仮定し，梁のヤング率は  $E = 3.0 \times 10^3 \text{ kPa}$ ，ポアソン比を  $\nu = 0.4999$  とした．

B-bar 法との比較にあたり， $u - \varepsilon_v$  定式化では安定化パラメータ  $\alpha = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$  で解析を行った．この範囲は，Commend らによる変位－圧力混合型安定化 FEM で弾性体に適するとされる値を参考に設定した<sup>4)</sup>．

## (2) 解析結果と考察

梁中心軸上自由端の鉛直下向き変位量の理論解  $v_{\text{theoretical}}$  は，梁の長さ  $L$ ，高さ  $D$ ，単位奥行きを仮定した断面二次モーメント  $I$  を用いて以下の式で表される<sup>5)</sup>．

$$v_{\text{theoretical}} = \frac{P}{6EI} \left\{ \frac{1}{4} (4 + 5\bar{\nu}) D^2 L + 2L^3 \right\} \quad (3)$$

$$I = \frac{1}{12} D^3, \bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \bar{\nu} = \frac{\nu}{1 - \nu}$$

梁の自由端中央に相当する節点鉛直方向変位の理論解との差として変位誤差を式(4)で定義し，図-2 に各要素サイズでの結果を示す．解析は静的条件，1ステップで行っており，節点位置のリセットによる影響はない．

$$\text{Error} = \frac{v - v_{\text{theoretical}}}{v_{\text{theoretical}}} \times 100[\%] \quad (4)$$

図-2 から，適切な安定化パラメータ ( $\alpha = 0.1$ 程度) をとれば  $u - \varepsilon_v$  定式化は B-bar 法に近い性能を示し，要素サイズを小さくとると安定化パラメータによらず変位量が理論解に漸近していくことが分かる．

一方で，安定化パラメータが過大であると理論解との誤差が大きくなり，変位を過剰に評価している．これは式(2)で示した安定化に関連する．ひずみは弱形式で定義されているため，式(2)の安定化項に含まれている  $\nabla^2 \varepsilon_p$  は各要素で完全にゼロにはならない．よって，安定化パラメータ  $\alpha$  が過度に大きい場合，安定化項が過大となり，ひずみの定義式が本来の式(式(1))から乖離し過剰な圧縮性を与えてしまう．以上の背景から，安定化パラメータを過剰に大きくすると変形が過大に評価されたと考えられる．

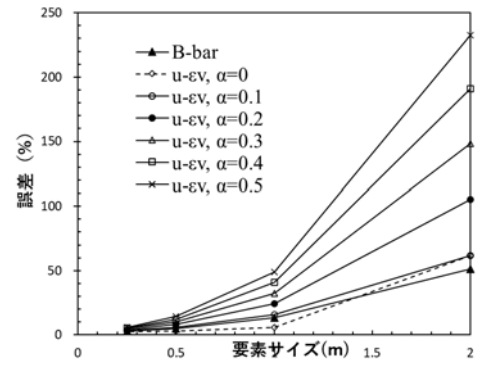


図-2 要素サイズと梁先端変位量の誤差の関係

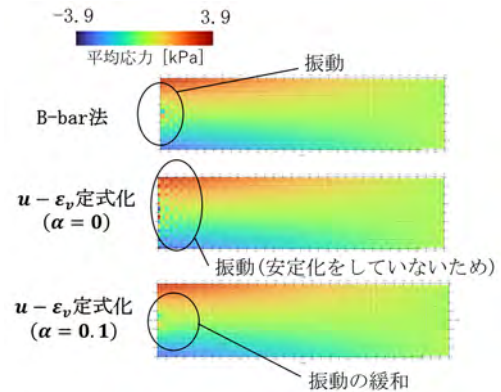


図-3 弾性片持ち梁の平均応力分布

体積ロッキング対策に B-bar 法， $u - \varepsilon_v$  定式化 ( $\alpha = 0.0, 0.1$ ) を用いた場合の平均応力分布を図-3 に示す．ここでは，梁を水平方向に 32 要素，鉛直方向に 16 要素に分割している．B-bar 法では平均応力は要素ごとに不連続となり，分布に振動が生じたが， $u - \varepsilon_v$  定式化では滑らかに緩和されていることが分かる．また安定化パラメータ  $\alpha$  が 0 のときには平均応力に振動が生じているのが，安定化によって緩和されている．

## 4. まとめ

本稿では陰的 MPM における新たな体積ロッキング対策である  $u - \varepsilon_v$  定式化における安定化について弾性梁の曲げ解析を通じて検討した．要素を十分小さくすれば変位精度は B-bar 法と同等で，安定化パラメータの選定の影響も小さい．また，同手法による平均応力分布は B-bar 法より滑らかであることが確認された．

## 参考文献

- 1) Sulsky *et al.*: *CMAME*, Vol. 118, 1, pp. 179-196, 1994.
- 2) Talbot *et al.*: *Comput. Geotech.*, Vol. 165, 105881, 2024.
- 3) 岡川ら: 第 28 回応用力学シンポジウム，発表番号 21012-18-06, 2025.
- 4) Commend *et al.*: *Comput. Methods in Appl. Mech. Eng.* Vol. 193, 33, 2004.
- 5) Timoshenko, S. P.: *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., 1988.