

## 第II部門

## 渦動粘性項を考慮した運動量式を用いた二点境界値問題としての水面形解析法

フェロー○細田 尚

北見工業大学工学部 正会員 白井 秀和

京都大学大学院工学研究科 正会員 音田慎一郎

## 1. はじめに

本研究の目的は、渦動粘性項を有する定常一次元運動量方程式を用いた二点境界値問題としての水面形解析法について基本的な検討を行うことである。細田・白井・音田<sup>1)</sup>は急勾配水路の流れを対象として、渦動粘性項を有する運動量方程式に対して上流端で二つの境界条件（水深および水深の空間方向微係数）を与えて水面形解析を行う方法（以後、一点境界値問題としての解析法）を提案した。上流端の境界条件をパラメータとして変化させることで、射流から跳水状の水深急変部を通過し下流端水深に到達する水面形を再現できる可能性について指摘している。（ただし実際の強跳水ではなく乱流による運動量輸送を評価した渦動粘性項を考慮して得られる跳水状の水深急変分布を意味する。）しかし、この水理条件の場合水深を制御できるのは上流端と下流端であるため、水理的には上下流端で水深を与える二点境界値問題としての解析法を検討する必要がある。一点境界値問題としての解析法はそれと数学的に同等な解析法と位置づけられる。そこで本研究では、簡易な二点境界値問題としての水面形解析法を提案するとともにこれまでに一点境界値問題として解析した事例に適用することで跳水状の水深急変部を含む連続な水面形計算が可能であることを示す。

## 2. 基礎式とその無次元化

図-1に示した座標系と水理条件設定の下で、単位幅に対する渦動粘性項を有する一次元運動量方程式を記述すれば式(1)および式(2)となる。

$$q = Uh = \text{一定} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \left( hU^2 + \frac{1}{2}gh^2 \cos \theta \right) = gh \sin \theta - c_f U|U| + \frac{d}{dx} \left( D_{m_x} h \frac{dU}{dx} \right), \quad D_{m_x} = \alpha q \quad (2)$$

ここに、 $x$ は空間座標、 $U$ は水深平均流速、 $h$ は水深、 $q$ は単位幅流量、 $\theta$ は路床勾配、 $Y_b$ は平坦な路床の基準水平面からの標高、 $D_{m_x}$ は渦動粘性係数、 $c_f$ は摩擦係数、 $\alpha$ は式(2)で渦動粘性係数を評価する場合の定数。

式(2)を変形すると式(3)となる。

$$(gh^3 \cos \theta - q^2) \frac{dh}{dx} = gh^3 \sin \theta - c_f q^2 + D_{m_x} q \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 - D_{m_x} q h \frac{d^2 h}{dx^2} \quad (3)$$

次の無次元量を用いて基礎式を無次元化すれば式(4)となる。 $h_c, h_0$ は通常限界水深、等流水深の定義と同一である。

$$x' = \frac{x}{h_c}, h' = \frac{h}{h_c}, Fr_0 = \frac{q}{\sqrt{gh_0 \cos \theta}}, h'_0 = \frac{1}{Fr_0^2}, h_c = \left( \frac{q^2}{g \cos \theta} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$(h'^3 - 1) \frac{dh'}{dx'} = c_f (Fr_0^2 h'^3 - 1) + \alpha \left( \frac{dh'}{dx'} \right)^2 - \alpha h' \frac{d^2 h'}{dx'^2} \quad (4)$$

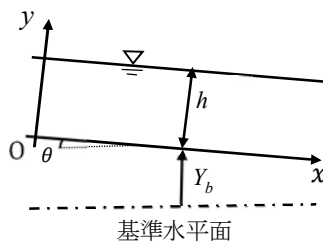


図-1 座標系と記号の説明

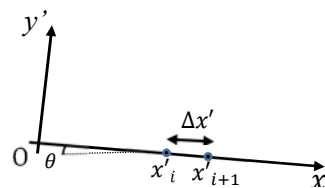


図-2 数値計算の説明図

### 3. 二点境界値問題としての解析法

本研究では、渦動粘性項を考慮した水面形方程式に対して非定常解析を簡易化した方法で二点境界値問題としての水面形解析を試みる。すなわち、式(4)は微分形の運動方程式に対応していることに着目し、次式のような非定常項に相当する項を付加することで定常解への収束計算を行う。\$t\$を時間、\$\tau'\$を\$tq/h\_c^2\$で定義される無次元時間とすると、左辺の\$h'\partial h'/\partial \tau'\$は運動方程式の非定常項\$\partial U/\partial t = \partial(q/h)/\partial t\$に対して単位幅流量 \$q\$一定とおいて得られる項である。よって、物理的な時間変化を意味せず収束計算の繰り返し過程を表現しているにすぎない。

$$h' \frac{\partial h'}{\partial \tau'} = (h'^3 - 1) \frac{\partial h'}{\partial x'} - c_f (Fr_0^2 h'^3 - 1) - \alpha \left( \frac{\partial h'}{\partial x'} \right)^2 + \alpha h' \frac{\partial^2 h'}{\partial x'^2} \quad (5)$$

式(5)を\$h'\$で除し、図-2に示した\$x\$軸上の格子点を用いて式(6)のように離散化する。

$$\frac{h'_i{}^{n+1} - h'_i{}^n}{\Delta \tau'} = (h'_i{}^n)^2 \frac{(h'_{i+1}{}^n - h'_{i-1}{}^n)}{2\Delta x'} - \frac{1}{h'_i{}^n} \frac{h'_i{}^n - h'_{i-1}{}^n}{\Delta x'} - c_f \frac{\{Fr_0^2 (h'_i{}^n)^3 - 1\}}{h'_i{}^n} - \alpha \frac{1}{h'_i{}^n} \frac{(h'_{i+1}{}^n - h'_{i-1}{}^n)^2}{(2\Delta x')^2} + \alpha \frac{h'_{i+1}{}^n - 2h'_i{}^n + h'_{i-1}{}^n}{\Delta x'^2} \quad (6)$$

ここに、\$\Delta x'\$は図-2に示した二つの格子点の間隔、下添字\$i\$は格子点の位置を示す添字、\$n\$は収束計算過程のステップ数を表す。

式(5)の右辺第一項中最初の項は圧力勾配項であり、式(6)では中央差分を適用している。一方、式(5)右辺第一項中二番目の項は運動方程式の慣性項(移流項)であることを考慮して、式(6)では\$\partial h'/\partial x'\$に対して一次の上流差分(後退差分)を適用した。(中央差分では安定した計算結果を得ることができなかった。)

### 4. 計算条件と計算結果の考察

本研究では、細田・白井・音田<sup>1)</sup>が急勾配水路の流れを対象として一点境界値問題としての解析法を用いて行った水面形解析と同一の水力条件、計算条件の下で数値計算を実施した。以下に水力条件、計算条件を示す。

水力条件 \$\sin \theta=1/100, c\_f=0.005, \alpha=0.05, q=0.003(\text{m}^2/\text{sec}), h\_0=0.00772(\text{m}), h\_c=0.00972(\text{m}), Fr\_0=1.414\$

計算条件 \$\Delta x'=0.02, \Delta t'=0.015\$

初期条件として一点境界値問題としての解析法による計算結果を与えた。式(6)を適用して得られた収束後の結果(\$n=4000\$)を図-3に示した。計算法を用いて連続的に急変する水深分布が再現されているが、初期条件と比較して水深急変部での変化が緩やかになっている。これは離散式(6)に含まれる数値拡散の効果が大きいと考えられる。

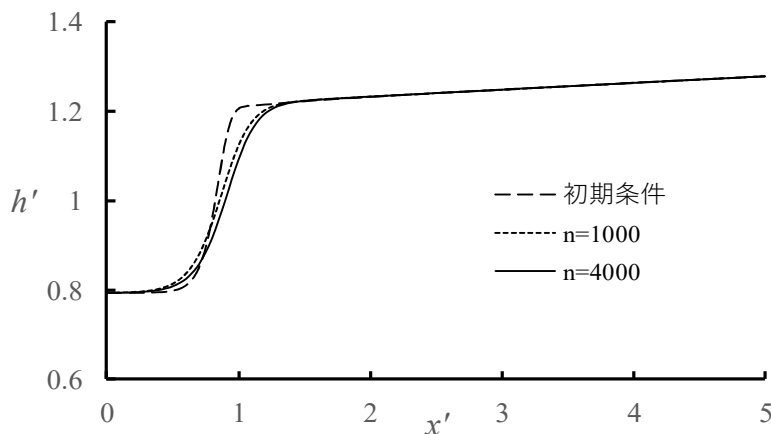


図-3 二点境界値問題としての水面形解析法を用いた跳水部を含む水面形解析結果

### 5. おわりに

今後、一点境界値・二点境界値問題としての解析法の関係や限界水深近傍での分布形の変化特性について検討したい。

参考文献 1) 細田 尚・白井秀和・音田慎一郎, 渦動粘性項を考慮した運動量式を用いた水面形解析法に関する二、三の考察, 令和7年度土木学会全国大会 第80回年次学術講演会, II-72, 2025.