

第Ⅱ部門

鉛直準二次元飽和不飽和流モデルに対する反復解法の検討

京都大学大学院工学研究科 学生員 ○荒井 智裕
 京都大学大学院工学研究科 学生員 普神 素良
 京都大学大学院工学研究科 正会員 市川 温

1. 研究の背景と目的

リチャーズ式¹⁾は、水文学や農学などの分野で頻繁に使用される非線形偏微分方程式の一つであり、土壌中の水分移動を記述するために用いられる。しかし、リチャーズ式の計算には多大なコストがかかり、流域規模の降雨流出計算には適していない。普神ら²⁾が開発した鉛直準二次元飽和不飽和流モデル（以下、準二次元モデル）は、斜面傾斜方向の動水勾配を斜面勾配で近似することで計算コストを削減し、計算速度を大幅に改善した。このモデルで用いられている修正ピカール法³⁾は、反復解法としては定評があるものの解の収束が遅いという欠点がある。本研究では、より早い収束を示すニュートン法を準二次元モデルに導入して数値計算を行い、計算結果と計算時間の比較を行うことで、準二次元モデルにおけるより良い反復計算の手法を検討する。

2. 鉛直準二次元飽和不飽和流モデルとその反復解法

(1) 準二次元モデルの構成

鉛直二次元のリチャーズ式は次のように書ける。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + \cos \omega \right) \right] - \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

ここで、 θ :体積含水率、 t :時間、 x :斜面傾斜方向の空間座標、 z :斜面に垂直な方向の空間座標、 K :透水係数、 ψ :圧力水頭、 ω :斜面角度、 u :斜面傾斜方向のダルシー流速である。上式について、斜面傾斜方向の動水勾配を斜面勾配で近似した上で次のように離散化する。

$$\begin{aligned} \frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta z^2} \left[K_{i-1/2}^{n+1} \psi_{i-1}^{n+1} - (K_{i-1/2}^{n+1} + K_{i+1/2}^{n+1}) \psi_i^{n+1} \right. \\ &\quad \left. + K_{i+1/2}^{n+1} \psi_{i+1}^{n+1} \right] + \frac{K_{i+1/2}^{n+1} - K_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta z} \cos \omega \\ &\quad + \frac{1}{\Delta x} (u(u)_i^{n+1} - K_i^{n+1} \sin \omega) \end{aligned} \quad (2)$$

非線形であるこの式を準二次元モデルでは、反復解法として修正ピカール法を用いて線形化している。また、土

壌の保水特性及び透水特性は、Mualem-van Genuchten 式^{4),5)}によって表現している。

(2) 反復解法の適用

修正ピカール法を用いて式(2)を線形化すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t} C_i^{n+1,m} \delta_i^m + \frac{\theta_i^{n+1,m} - \theta_i^n}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{\Delta z^2} \left[K_{i-1/2}^{n+1,m} (\delta_{i-1}^m + \psi_{i-1}^{n+1,m}) - (K_{i-1/2}^{n+1,m} + K_{i+1/2}^{n+1,m}) \right. \\ &\quad \left. (\delta_i^m + \psi_i^{n+1,m}) + K_{i+1/2}^{n+1,m} (\delta_{i+1}^m + \psi_{i+1}^{n+1,m}) \right] \\ &\quad + \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m} - K_{i-1/2}^{n+1,m}}{\Delta z} \cos \omega + \frac{1}{\Delta x} (u(u)_i^{n+1} - K_i^{n+1,m} \sin \omega) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 C :比水分容量 $C = d\theta/d\psi$ であり、 δ_i^m :反復計算 $m+1$ 回目と m 回目の圧力水頭の差 $\delta_i^m = \psi_i^{n+1,m+1} - \psi_i^{n+1,m}$ である。また、式(2)の(左辺)-(右辺)を F_i としニュートン法を用いて式(2)を線形化すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_i}{\partial \psi_{i-1}} (\psi_{i-1} - \psi_{i-1}^m) + \frac{\partial F_i}{\partial \psi_i} (\psi_i - \psi_i^m) + \frac{\partial F_i}{\partial \psi_{i+1}} (\psi_{i+1} - \psi_{i+1}^m) \\ &= -F_i^m \end{aligned}$$

これを反復計算できる形に変形すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} &\left\{ -\frac{1}{\Delta z^2} \left(\frac{\partial K_{i-1/2}}{\partial \psi_{i-1}} \psi_{i-1} + K_{i-1/2} - \frac{\partial K_{i-1/2}}{\partial \psi_{i-1}} \psi_i \right) + \frac{1}{\Delta z} \frac{\partial K_{i-1/2}}{\partial \psi_{i-1}} \cos \omega \right\} \delta_{i-1}^m \\ &+ \left\{ \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \theta_i}{\partial \psi_i} - \frac{1}{\Delta z^2} \left[\frac{\partial K_{i-1/2}}{\partial \psi_i} \psi_{i-1} - \left(\frac{\partial K_{i-1/2}}{\partial \psi_i} + \frac{\partial K_{i+1/2}}{\partial \psi_i} \right) \psi_i - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (K_{i-1/2} + K_{i+1/2}) + \frac{\partial K_{i+1/2}}{\partial \psi_i} \psi_{i+1} \right] - \frac{1}{\Delta z} \left(\frac{\partial K_{i+1/2}}{\partial \psi_i} - \frac{\partial K_{i-1/2}}{\partial \psi_i} \right) \cos \omega \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial K_i}{\partial \psi_i} \sin \omega \right\} \delta_i^m + \left\{ -\frac{1}{\Delta z^2} \left(-\frac{\partial K_{i+1/2}}{\partial \psi_{i+1}} \psi_i + \frac{\partial K_{i+1/2}}{\partial \psi_{i+1}} \psi_{i+1} + K_{i+1/2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Delta z} \frac{\partial K_{i+1/2}}{\partial \psi_{i+1}} \cos \omega \right\} \delta_{i+1}^m = -F_i^m \end{aligned} \quad (4)$$

式(3)(4)において、未知数は $\delta_{i-1}^m, \delta_i^m, \delta_{i+1}^m$ あり、これらを求めることで $m+1$ 回目の圧力水頭が求まる。 δ が十分小さくなるまで反復計算を繰り返すことで、時刻 t^{n+1} での圧力水頭を求めることが出来る。

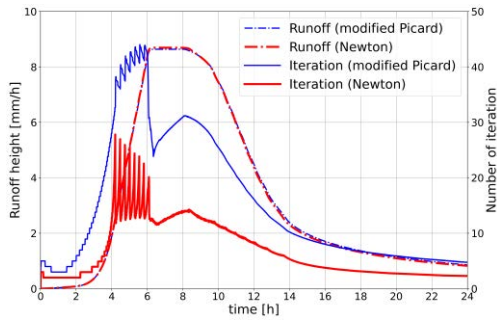


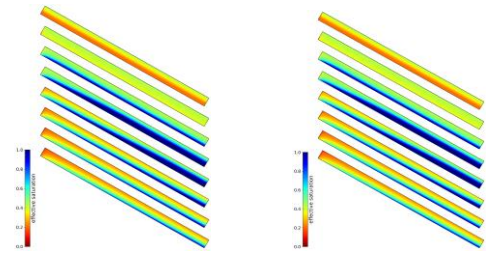
図-1 土壌 1 における流出高と反復回数の推移. 赤線はニュートン法, 青線は修正ピカル法での結果を表す. 破線は流出高, 実線は反復回数を示す.

3. 適用条件と結果

斜面長100m, 土層厚1m, 斜面勾配 $\omega = 30^\circ$ の斜面を対象に計算を行った. 地表面では, 降雨強度 r を流入強度としてフラックス境界条件を設定し, 土層最上層が飽和したら表面流が発生するとして圧力水頭境界条件に切り替えた. 土層底面では, 不透水境界条件を設定した. 初期値として斜面全体に一樣に有効飽和度 $Se = 0.2$ を設定し, 斜面垂直方向に降雨強度 $r = 20 \text{ mm/h}$ を計算開始時から 6 時間一定に与え, 24 時間分の斜面流出を計算した. 土壌特性パラメータについては, 3 種類の値を用い, 透水性の高い順に, それぞれ土壌 1, 2, 3 とした.

図-1、図-2 はそれぞれ透水性の高い土壌である土壌 1 における計算結果である. 図-1 は斜面下端のハイドログラフと反復回数のグラフを, 図-2 では土層の S_e 分布を示している. 図-1 のハイドログラフ, ならびに図-2 の S_e 分布をみると, ニュートン法と修正ピカル法の計算結果は一致していることが分かる. 図-1 の反復回数を見ると, ニュートン法の方が計算回数が少なくなっていることが分かる. これに伴い計算時間も短縮できることが確認できた. 土壌 2 でも同様の結果となった.

透水性の低い土壌 3 に関してはニュートン法を用いた準二次元モデルでは解が収束しなかった. そこで, ニュートン法で解が収束しない土壌が飽和しそうな状況では修正ピカル法で確実に計算し, それ以外の場所ではニュートン法で計算するというハイブリッド法を考え, 土壌 3 に適用した. 反復解法切り替えの条件は, 計算カラム上端の有効飽和度から判定した. 図-3 に示すのが切り替えの条件を変えた時のそれぞれの反復回数のグラフである. 条件を厳しくするほど, 全体的に反復回数が減少することが分かり, 切り替えが正しく出来ていることが分かる. この結果, ハイブリッド法による計算では, 適切に解が得られ, かつ計算時間短縮に一定の効果があることが確認できた.



(i) ニュートン法 (ii) 修正ピカル法

図-2 土壌 1 の S_e 分布 (上から 1, 2, 4, 6, 8, 12, 18, 24 時間後)

4. まとめ

本研究は, 準二次元モデルにおいて修正ピカル法とニュートン法を比較し, 表面流が発生しない程度の降雨強度や透水性の高い土壌の場合には, ニュートン法を用いることで計算時間を大幅に短縮できることを確認した. しかし, 表面流が発生するような降雨強度や透水性の低い土壌の場合, ニュートン法では解が収束しなかった. そこで, 修正ピカル法とニュートン法のハイブリッド法を検討し, 飽和度による切り替えで計算速度の改善を実現した. 今後は, ハイブリッド法をさらに改善し, 適切な切り替え条件を模索したい.

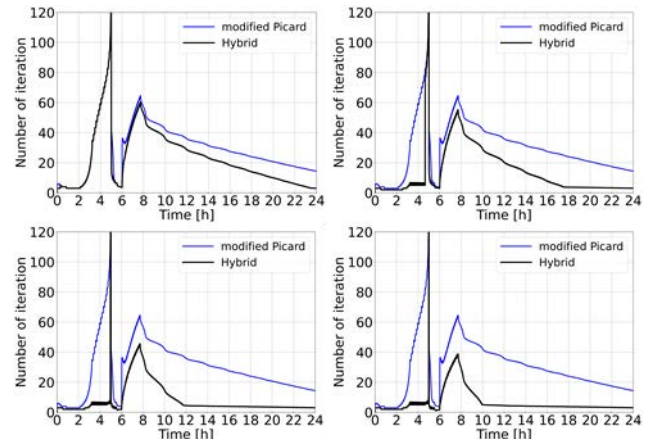


図-3 土壌 3 における反復回数の推移. 黒線はハイブリッド法, 青線は修正ピカル法での結果を表す.

(a) $Se > 0.5$, (b) $Se > 0.7$, (c) $Se > 0.9$, (d) $Se > 0.95$ で修正ピカル法によって計算した.

参考文献

- Richards, L. A.: Capillary conduction of liquids through porous mediums, *Physics*, Vol.1, No.5, pp.318-333, 1931.
- 普神素良, 市川温, 萬和明, 安賢旭, 立川康人: 鉛直準二次元飽和不飽和地中流モデルの開発, 土木学会論文集 B1 (水工学), 78 巻, 第 2 号, pp.I751-I756, 2022.
- Celia, M. A., Bouloutas, E. T., and Zarba, R. L.: A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation, *Water Resour. Res.*, 26(7), pp.1483-1496, 1990
- Mualem, Y.: A new model for predicting hydraulic conductivity of unsaturated porous media, *Water Resources Research*, Vol.12, pp.513-522, 1976.
- van Genuchten, M.: A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils, *Soil Science Society of America*, Vol.44, pp.892-898, 1980.