

京都大学大学院工学研究科 学生員 ○田中 莉空
 京都大学大学院工学研究科 正会員 清水 裕真
 京都大学大学院工学研究科 正会員 Abbas Khayyer
 京都大学大学院工学研究科 正会員 後藤 仁志

1. はじめに

ISPH 法¹⁾は粒子法の一つであり, 自由表面流の数値計算に広く用いられている. これまで手法に対し様々な観点からの基礎研究・高度化研究が行われてきたが¹⁾, 時間解像度設定と手法の計算精度・安定性の関係についての検証は実施されていない. 本研究では, ISPH 法の時間解像度と計算性能の関係を検討するとともに, 時間刻み幅設定の計算解への影響を除去するための数値的修正法を提案する.

2. 数値解析手法

ISPH 法の時間発展は半陰の計算アルゴリズムに基づいて行われる. 第一段階(陽的計算)における速度増分を $\delta \mathbf{u}^p$ とすると, 圧力 Poisson 方程式(PPE)は

$$\nabla^2 p^{k+1} = -\frac{\rho_0}{\Delta t} \langle \nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} \rangle + \frac{\rho_0}{\Delta t} \langle \nabla \cdot \mathbf{u}^k \rangle + \frac{\rho_0}{\Delta t} \langle \nabla \cdot \delta \mathbf{u}^p \rangle \quad (1)$$

と書ける¹⁾.

ここで, 次ステップで連続式を満たすと仮定すると式(1)の右辺(ソース項)第1項は0と書ける. 右辺第3項は $\delta \mathbf{u}^p = \{(\mathbf{v} \nabla^2 \mathbf{u})^k + \mathbf{g}\} \Delta t$ を Δt で除することから項全体としては Δt に依存しない. 一方で, 右辺第2項について, $\nabla \cdot \mathbf{u}^k$ は現在時刻の速度場から求められ Δt に依存せず, 分母に Δt があるため, 項全体としての大きさは $1/\Delta t$ に依存する. また, 式(1)左辺は時刻 $k+1$ の圧力のラプラシアンであり, その大きさは時間刻み幅には依存しない. すなわち, 右辺第2項のみが時間解像度に依存しているため, 時間刻み設定を変更するとソース項が併せて変化し, 式を通して得られる圧力場も異なったものとなる.

PPEの時間刻み幅への依存性を解消するためには, 式(1)右辺第2項の分母の時間刻み幅を, 計算に用いる時間刻み幅に依存しない変数による置き換え(例えば Iida・Yokoyama²⁾)が有用と考えられる. 本研究では, 当該 Δt を以下の CFL 条件により規定される時間刻み幅 $\Delta t_{\max}^{\text{CFL}}$ にて置き換えることで時間刻み幅への依存性の解消を試みた. すなわち, 式(1)は

$$\nabla^2 p^{k+1} = \frac{\rho_0}{\Delta t_{\max}^{\text{CFL}}} \langle \nabla \cdot \mathbf{u}^k \rangle + \frac{\rho_0}{\Delta t} \langle \nabla \cdot \delta \mathbf{u}^p \rangle \quad (2)$$

$$\Delta t_{\max}^{\text{CFL}} = C_{\text{CFL}} \frac{h}{u_{\max}} \quad (3)$$

と書き換えられる.

3. 数値シミュレーション

既往モデル(Original model)と提案モデル(New model; $\Delta t_{\max}^{\text{CFL}}$ による置き換えを施したもの)の比較のため, Taylor Green 流れと静水圧計算のテストを実施した. 置き換えの効果の検証として, $\langle \nabla \cdot \mathbf{u}^k \rangle$ と Δt の大きさの関係について検討するため, 以下の(4)式で表される速度発散誤差を定義した.

$$Er_{\text{div } \mathbf{u}} = \sum_i^N |(\nabla \cdot \mathbf{u})_i V_i| \quad (4)$$

3.1. Taylor-Green 流れ

(1)数値シミュレーション概要

計算領域は $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ の領域とし, 水平・鉛直方向に周期境界条件を課す. Reynolds 数は $Re = 1.0 \times 10^3$ とし, New model と Original model による計算結果を比較する. 空間解像度は $d_0 = 0.005 \text{ m}$, 時間解像度は $\Delta t = 0.0001 \text{ s}$, CFL 時間解像度は $\Delta t_{\max}^{\text{CFL}} = 0.001 \text{ s}$ である.

(2)数値シミュレーション結果

図1に高時間解像度における計算結果スナップショットを示す. 定性的な比較ではモデル間の違いは見られなかった. 次に, 速度発散誤差の時間推移について, 時間解像度を変化させて出力したものを図2, 図3に示す.

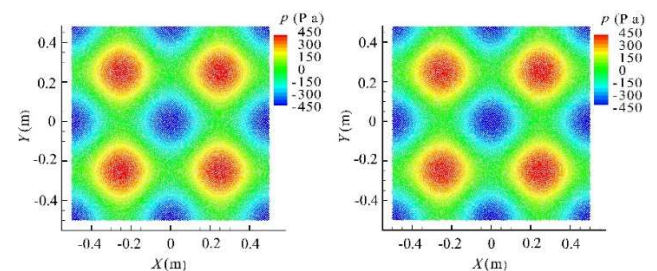


図1 圧力分布 (左 New model 右 Original model)

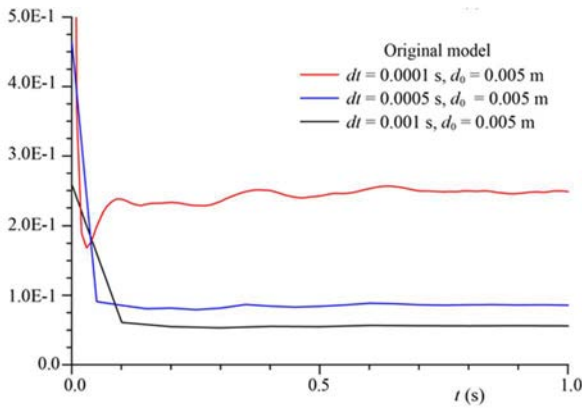


図2 速度発散誤差 (Original model)

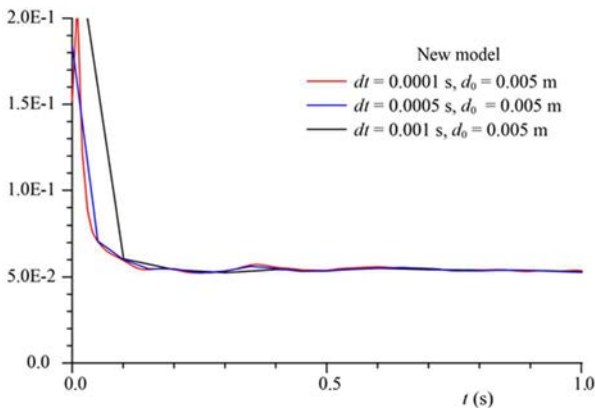


図3 速度発散誤差 (New model)

図2より, Original model では時間刻み幅を変化させるとそれに伴い速度発散誤差も変動する. 式(1)右辺第2項から, もし誤差 $(\nabla \cdot \mathbf{u}^k)$ が Δt に反比例 ($O(\Delta t)$ のオーダーで減少)して変化する場合は Δt が変化してもソース項全体としての大きさは変化しないはずであるが, 図2の計算結果からは誤差は反比例しているとは言えず, すなわち手法の時間解像度依存性が確認できた. 一方, 図3より, New model では時間解像度設定によらず速度発散誤差は一定であるとがわかる. New model の式 (式(2)右辺第1項)において分母は既に一定値 $\Delta t_{\max}^{\text{CFL}}$ にておきかえているため, 当該項は時間刻み幅に非依存であり, つまり New model は時間解像度に非依存であるとわかる.

3.2. 静水圧計算

(1)数値シミュレーション概要

幅 1m, 高さ 1m の静水条件を計算する. 空間解像度は $d_0 = 0.01\text{m}$, 時間解像度は $\Delta t = 0.0002\text{ s}$ とした.

(2)数値シミュレーション結果

図4に Original model, 図5に New model による計算結果のスナップショットを示す. 本計算では時間刻み幅を高解像度 ($\Delta t = 0.0002\text{ s}$) に設定した計算のため, Original model ではソース項の増大により不安定な圧力

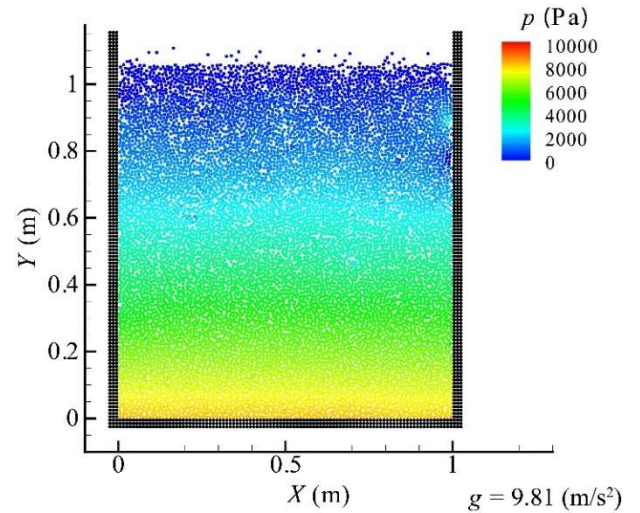


図4 静水圧スナップショット (Original model)

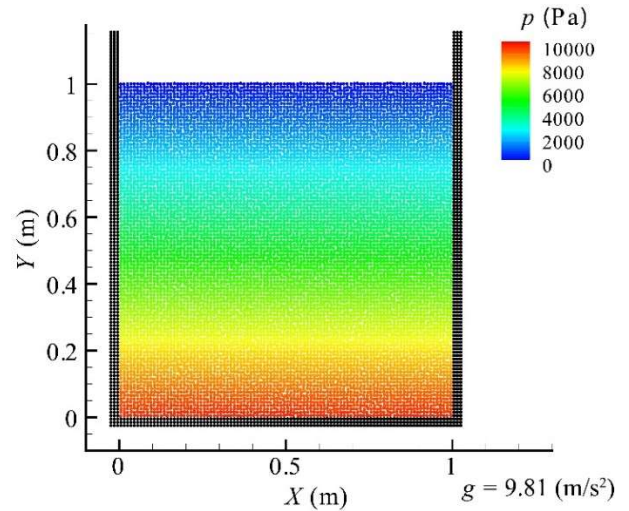


図5 静水圧スナップショット (New model)

分布ならびに水表面形状が得られた. 一方で, New model では時間刻み幅を高解像度にした場合でも滑らかな圧力分布が得られており, 時間刻み幅に非依存になったことによる安定性の向上が認められた.

4. 結論

本稿では ISPH 法のソース項の時間刻み幅に置換を施すことにより, 手法の時間刻み依存性を取り除いた. ベンチマークの結果から, 提案手法では高解像度な時間刻み幅を設定した計算の場合にも計算解はほぼ同等の安定したものが得られることが示された.

参考文献

- 1) 後藤仁志: 粒子法 連続体・混相流・粒状体のための計算科学, 森北出版, p.289 2018.
- 2) T. Iida, Y. Yokoyama, Convergence-improved source term of pressure Poisson equation for moving particle semi-implicit, Applied Ocean Research, Vol.124, 2022.