

京都大学工学部地球工学科 学生員 ○北 一輝
 京都大学大学院工学研究科 正会員 清水 裕真
 京都大学大学院工学研究科 正会員 後藤 仁志

1. はじめに

粒子法¹⁾は本研究で用いた ISPH (Incompressible SPH) 法をはじめ Lagrange 型の手法として開発されてきた。一方, Euler 型の粒子法は 2016 年に Lind and Stansby²⁾が Euler 型 ISPH 法を開発して以来研究が進められている。Euler 型 ISPH 法は粒子を空間に規則配列状に固定して計算する特性から高い精度が得られていたが, 既往の研究²⁾における精度検証は低 Re 数のベンチマークテストのみで行われており, 高 Re 数問題に対する検証が不十分である。そこで本研究では, 高 Re 数条件への Euler 型 ISPH 法の適用性を検討する。移流項の離散化手法の高度化を通して, 数値安定性を向上させる。

2. 数値解析手法

本研究では種々の高精度化手法を導入した Euler 型 ISPH 法を用いて計算を行った。Euler 型 ISPH 法は Lagrange 型 ISPH 法と異なり, 位置更新を行わない代わりに移流項を計算する必要があるため, 以下のように移流項をモデル化し離散化した。

$$\langle (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \rangle_i = \mathbf{u}_i \cdot \sum_j V_j (\mathbf{u}_{ij} \otimes \nabla \mathbf{w}_{ij})^T \quad (1)$$

格子法の場合, 移流計算で時間微分項を前進差分, 空間微分項を中心差分で計算すると不安定化することが知られている (FTCS 問題)³⁾。粒子法の円形カーネルを通した式 (1) による離散化は本質的に中心差分法に近いと考えられ, 不安定化の恐れがある。そこで FTCS 問題の対策として格子法では風上差分法が用いられることを考慮し, 粒子法における風上差分法の枠組みを構築し導入する。

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \rangle_i &= \mathbf{u}_i \cdot \left(\sum_{j \in \Omega_{uw}} \left[\frac{\mathbf{A}_{ij}^1}{\mathbf{A}_{ij}^2} \right] \cdot \mathbf{p}_{ij} \otimes \frac{\mathbf{u}_{ij}}{r_{ij}} V_j \frac{\partial \mathbf{w}_{ij}}{\partial r_{ij}} \right); \\ \mathbf{A}_i &= \left(\sum_j \mathbf{p}_{ij} \otimes \mathbf{p}_{ij} V_j \frac{\partial \mathbf{w}_{ij}}{\partial r_{ij}} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_i^5 \end{bmatrix}, \\ \Omega_{uw} &= \{j | r_{ij} \cdot \mathbf{u}_{ij} < 0 \cap \mathbf{w}_{ij} > 0\} \end{aligned} \quad (2)$$

上式は, 基準計算点の微分近似を移流速度上流側 (図 1

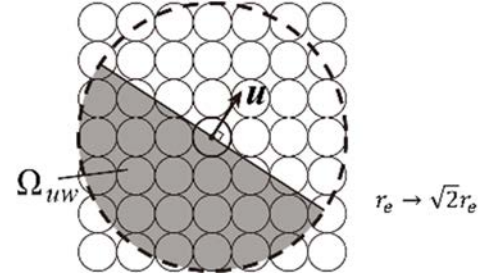


図1 風上差分モデル概念図

の Ω_{uw}) に存在する離散点の値を用いて評価することを意味する。なお, 風上差分法では影響域の面積が半分になることで, 影響域内の離散点が少なくなり, 計算が不安定化することが懸念される。そこで, 本研究では影響半径を $\sqrt{2}$ 倍し影響域の面積が中心差分型と同一になるように補正するとともに, 離散化に二次精度モデル⁴⁾を導入した。

3. 数値シミュレーション

3.1. Taylor-Green vortex

(1) 数値シミュレーション概要

計算領域は $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ の正方形とし, 水平・鉛直方向に周期境界条件を課す。また, Reynolds 数は高 Re 数条件である $Re = 1.0 \times 10^6$ とし, 移流項を中心差分型および 2 次精度風上差分法で離散化し結果を比較する。

(2) 数値シミュレーション結果

図 2 に計算結果スナップショットを示す。中心差分型では $t = 1.2 \text{ s}$ でノイズが発生し不安定化することがわかる。一方, 2 次精度風上差分法では安定して計算できおり, 風上化が計算安定性に寄与することが示された。

図 3 は総エネルギー時間変化のグラフである。この図からも中心差分型が $t = 1.2 \text{ s}$ 付近で不安定化していることがわかる。一方, 2 次精度風上差分法は安定していることに加え減衰が極めて小さく, エネルギー保存性の観点からも本手法の有効性が示された。

3.2. 平面 Poiseuille 流

(1) 数値シミュレーション概要

幅 $2d = 0.2 \text{ m}$, 長さ $30d = 3 \text{ m}$ ($d = 0.1 \text{ m}$) の 2 次元水

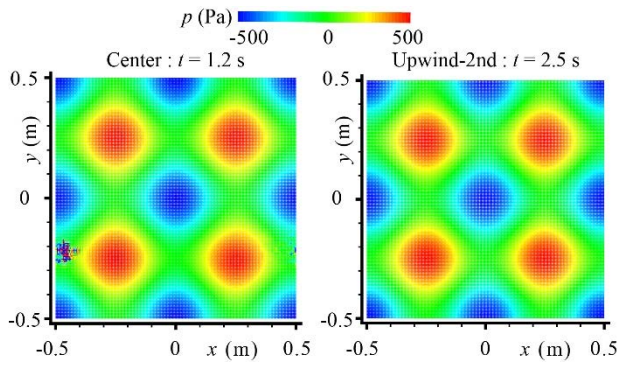


図2 計算結果スナップショット (左: 中心差分型, 右: 2次精度風上差分法)

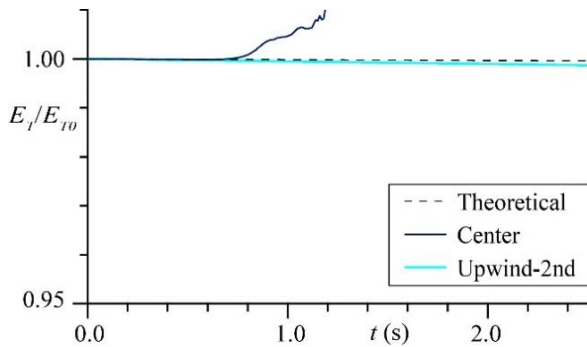


図3 総エネルギー時間推移

路を用い, 2次精度風上差分法で計算を行う. 流出境界には圧力 $p = 0$, 流入境界には層流理論解を与えた. 計算粒径は $d_0 = 0.002 \text{ m}$, 0.005 m , 0.01 m とし, Reynolds 数は $Re = 200$ と設定した. また, Euler 型 ISPH 法の壁面境界条件は最も単純なモデルである壁面粒子に速度 0 を設定する手法⁷⁾で計算を実施した.

(2) 数値シミュレーション結果

図4に $x = 1.5 \text{ m}$ (水路中央) における x 方向の流速空間分布を示す. 図より計算解像度に関わらずおおむね理論通りの計算結果が得られた. また, 解像度の向上に伴い計算結果が特に壁面近傍と管路中央において理論解に漸近していく様子が確認され, 本計算手法の収束性が定量的に示された.

(3) 壁面境界条件の再検討

壁面近傍計算の高精度化のため, 壁面境界条件の変更を検討する. 改良型壁面条件では粒子 i の影響域内の壁面粒子 j に $\mathbf{u}_{bj} = -\mathbf{u}_i$ と流速を与えることにより壁面粒子と水粒子の境界で速度 0 の条件を課すことでより厳密な壁面条件を与える.

図5に $x = 1.5 \text{ m}$ における x 方向の流速空間分布を示す. ここで, 特に壁面近傍では全解像度で壁面境界条件修正前の高解像度以上の精度が見られるなど計算精度の向上が見られた. また, 解像度の向上に従う計算精度

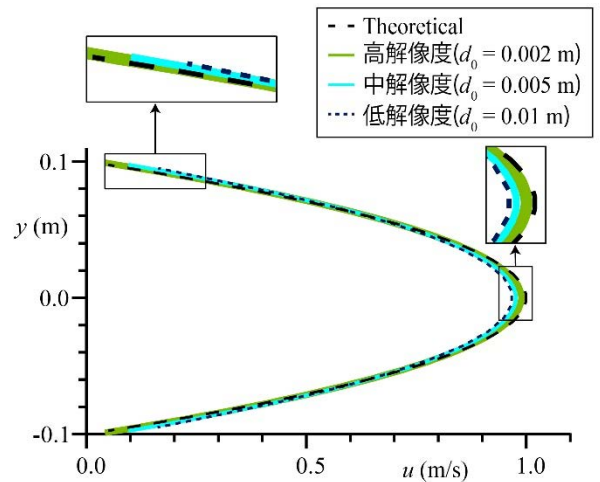


図4 x 方向流速空間分布

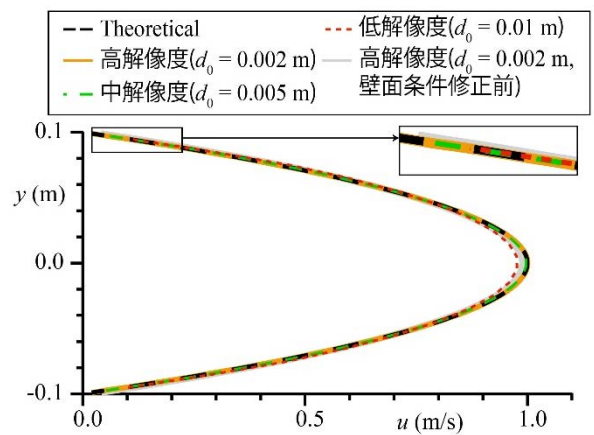


図5 x 方向流速空間分布

の向上が示され, モデルの収束性についても確認できた.

4. 結論

本研究では Euler 型 ISPH 法の高 Re 数への適用性の検討と移流項離散化の高度化を実施した. Taylor-Green vortex の計算を通じて, Euler 型 ISPH 法では高 Re 数条件下にて標準の移流項離散化手法が計算不安定化するが, 風上差分法の導入により改善できることを示した. また, 2次精度風上差分法はエネルギー保存性の観点からも優れたモデルであることを示した. 平面 Poiseuille 流のベンチマークでは Euler 型 ISPH 法の収束性を示すとともに, 壁面境界条件を改良し計算精度を向上できた. 参考文献

- 1) 後藤仁志: 粒子法 連続体・混相流・粒状体のための計算科学, 森北出版, p. 289, 2018.
- 2) S.J. Lind, and P.K. Stansby: High-order Eulerian incompressible smoothed particle hydrodynamics with transition to Lagrangian free-surface motion, Journal of Computational Physics, Vol. 326, pp. 290-311, 2016.
- 3) 後藤仁志: 流れの方程式, 森北出版, p. 551, 2022.