

第 I 部門

ドリフトを伴う非線形一自由度系の定常応答に関する一考察

京都大学工学部 学生員 ○綾城 威歩生
 京都大学大学院工学研究科 学生員 植村 佳大
 京都大学大学院工学研究科 正会員 高橋 良和

1. 背景

東北地方太平洋沖地震の発生を機に導入された危機耐性の概念を踏まえて、筆者らは終局後の復元力低下を緩やかにする埋込メナーゼヒンジ RC 柱の開発を行っている。しかし、過去の検討は変位制御による実験的検討を基に実施されており、復元力低下領域での動的安定性の検討が不足している。そこで本研究では、復元力低下領域における構造物の動的安定性の基本的な理解に向けて、敢えて単純な一自由度モデルを用いた理論的検討を行った。具体的には、構造物の動的安定性の判断指標として応答の片寄り（以降、「ドリフト」とする）の度合いに着目し、Caughey²⁾や Capecchi^{ら^{3),4)}による検討に応用することで導出した周波数応答関数を用いて、非線形一自由度系の動的安定性に関して考察を行った。}

2. ドリフトを伴う非線形一自由度系の周波数応答関数

Caughey や Capecchi らは振幅が正負対称な強制調和外力に対する運動方程式(式(1))を考えることで、非線形一自由度系の変位の周波数応答関数を導出している。

$$\ddot{x} + \omega_0^2 f(x) = \frac{\omega_0^2}{\gamma} \cos \omega t \quad (1)$$

ここに、 t は時間、 ω_0 は固有振動数、 $f(x)$ は一自由度系の復元力、 γ は外力のパラメータ、 ω は外力の円振動数である。ここで、式(1)に示す運動方程式は動的な力のつり合いを表すため、振幅が正負対称な強制調和外力が作用するとき、非線形一自由度系の復元力は正負対称となる。そのため、RC 部材のように、最大点指向型バイリニアの履歴曲線を有し、降伏後に復元力が一定となったのち骨格曲線が負勾配となる構造システムに、振幅が正負対称な強制調和外力が作用した場合、ドリフトを伴う変位応答が発現すると考えられる(図-1)。しかし、Caughey や Capecchi らの検討では、非線形一自由度系のドリフトは考慮されていない。そこで本研究では、図-1 に示すような定常応答を考え、応答解を式(2)のように仮定する。

$$x = X \cos(\omega t + \varphi) + D \quad (2)$$

ここで φ は外力と変位の位相差、 X は応答の振幅、 D はドリフト量である。なお本検討では、非線形一自由度系の復元力は正負対称となり、かつ復元力低下が生じない変形領域ではドリフトは発生しないと考え、ここで、変位の最大値 X_{max} に対する X および D を式(4)、式(5)のように一意に定めた。

$$X_{max} = X + D \quad (3)$$

$$X = \frac{1}{2} [\alpha(1 - \alpha)X_{max}^2 + (1 + 2\alpha^2\mu - \alpha)X_{max} - \alpha\{\mu^2(1 + \alpha) - \mu\} + \mu] \quad (4)$$

$$D = \frac{1}{2} [-\alpha(1 - \alpha)X_{max}^2 + (1 - 2\alpha^2\mu + \alpha)X_{max} + \alpha\{\mu^2(1 + \alpha) - \mu\} - \mu] \quad (5)$$

ここに、 μ は靱性率(復元力低下開始変位)、 α は終局後勾配である。

これらの式を用いて、本検討では Caughey の検討を参考にドリフトを伴う非線形一自由度系の周波数応答関数(7)を導出した。

$$\theta = \omega t + \varphi \quad (6)$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{X} \left\{ C(X_{max}) \pm \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - S(X_{max})^2} \right\} \quad (7)$$

$$C(X_{max}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(X \cos \theta + D) \cos \theta d\theta \quad (8)$$

$$S(X_{max}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(X \cos \theta + D) \sin \theta d\theta \quad (9)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (10)$$

ここに、 $q(x)$ は履歴曲線を表す関数、 $C(X_{max})$ および $S(X_{max})$ は骨格曲線の形状に関する関数である。

ここで、式(7)は外力周波数 ω と変位の最大値 X_{max} の関係式であるが、式(3)～式(5)を用いることで、ドリフト量と外力振動数の関係式(ドリフト量の周波数応答関数)を描くことができる。例として $\mu = 2.0$ 、 $\alpha = -0.05$ 、 $\gamma = 1.5$ の場合のドリフト量の周波数応答関数を図-2 に示す。ここで図-2 より、ドリフト量の周波

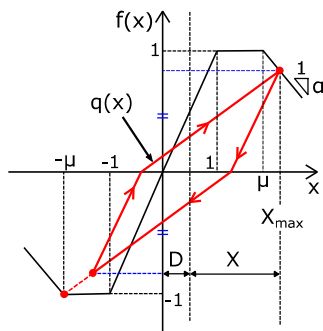


図-1 ドリフトを伴う定常応答の仮定

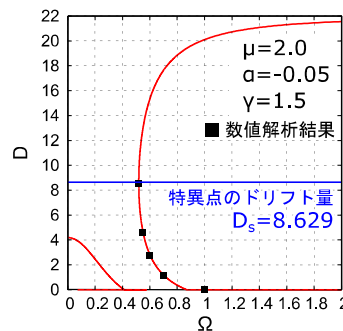


図-2 ドリフト量の周波数応答関数

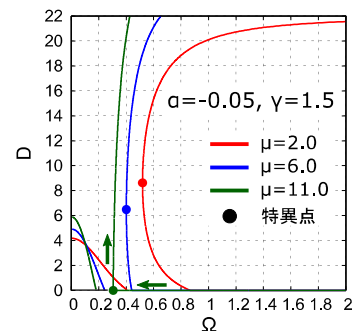
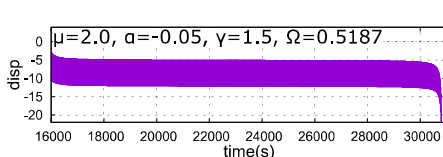
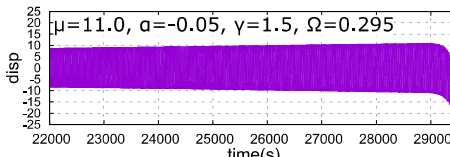
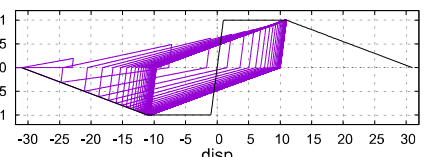
図-4 靱性率 μ と周波数応答関数の関係

図-3 特異点近傍で片側に発散する場合の時刻歴応答



(a)時刻歴応答



(b)履歴ループ

図-5 $\mu=11.0$ の場合の発散の様子

数応答関数には、外力振動数の微小な変化に対するドリフト量変化が無限大となる特異点が存在することがわかる。そこで本検討では、この特異点が系の動的安定性の検討の上で重要な意味を持ち得ると考え、数値解析により特異点近傍での非線形一自由度系の定常応答の振動特性および動的安定性に関して検討した。

3. ドリフトを伴う非線形一自由度系の定常応答に関する解析的検討

$\mu = 2.0$, $\alpha = -0.05$, $\gamma = 1.5$ の場合を例に、数値解析解と理論解の比較を行った結果を図-2に示す。 $D=0$ の部分ではドリフトは発生せず、外力振動数 ω が減少するにつれて D が増大し、 ω が一定となった後は各ケースで一定のドリフト量を有する定常応答を確認した。また、特異点近傍まで解析解と理論解は概ね一致したが、 ω をさらに漸減させると応答が急激に片側に発散したため、特異点のドリフト量よりも大きい領域で定常応答は得られなかった。ここで、特異点近傍で片側に発散する場合の時刻歴応答を図-3に示す。図-3を見ると、一定の ω となった後もドリフト量が徐々に増大し、特異点のドリフト量(以降、 D_s とする)近傍を境に応答が急激に発散する様子が見て取れる。また、骨格曲線及び外力のパラメータの異なるケースでも同様の数値解析を実施したところ、全てのケースで特異点近傍を境に応答が片側に発散した。以上から、 D_s が非線形一自由度系の定常応答が発散するか否かを判別する指標となり得る可能性が示されたといえる。

また、靱性率 μ を変化させた場合(図-4)、 μ の増加に伴い D_s は減少することがわかった。特に、 $\mu = 11.0$ として図-4に矢印で示す経路で ω を変化させた場合、復

元力低下が生じない領域では正負対称の変位を保っていた応答が、復元力低下領域に入りドリフトが発生した瞬間、急激に片側に発散した(図-5)。靱性率が過大の場合 D_s が0となる今回の例のように、外力の大きさや復元力特性が D_s に及ぼす理論的な影響を数値解析で再現することができた。

4. まとめ

ドリフトを伴う非線形一自由度系の定常応答に関して、周波数応答関数を用いる手法による理論的検討と数値解析による検証を行った結果、周波数応答関数上の特異点のドリフト量が、構造システムの定常応答がドリフトにより発散するか否かを判別する指標となり得る可能性が示された。また、外力の大きさや復元力特性が特異点のドリフト量に与える理論的な影響を数値解析で再現することができた。

謝辞：本研究の一部は科学研究費補助金基盤研究(B)18H01522の助成を受けて実施した。謝意を表します。

参考文献

- 1) 五島健斗, 植村佳大, 高橋良和：設計基準外事象に対する挙動が定性的に予測可能な埋め込みメナーゼヒンジRC構造の開発, 土木学会論文集 A1, Vol.75, No.4, pp.I_506-I_519, 2019.
- 2) T. K. Caughey : Sinusoidal Excitation of a System with Bilinear Hysteresis, Journal of Applied Mechanics, 27(4), pp.640-643, 1960.
- 3) D. Capecchi, F. Vestroni : Steady-State Dynamic Analysis of Hysteretic Systems, Journal of Engineering Mechanics, 111(12), pp.1515-1531, 1985.
- 4) D. Capecchi, F. Vestroni : Periodic Response of a Class of Hysteretic Oscillators, International Journal of Non-Linear Mechanics, 25(2/3), pp.30