第Ⅱ部門　　　山体地下における不飽和浸透の解析解に関する研究

京都大学工学部　学生会員　○菅原　快斗
京都大学防災研究所　正会員　佐山　敬洋
京都大学防災研究所　フェロー　寶　　馨

１．研究の背景

山体に降った雨による土砂災害や河川への流出を予測するためには、表層土壌だけでなく地下水まで含めた広い範囲での水移動を考慮しなければならない[1]。ただし表層土壌から基岩地下水面までは水分移動の挙動が複雑な不飽和領域となる。そのため不飽和浸透流を記述するリチャーズ式は強い非線形性を有する。同式を数値計算で解くためには膨大な計算量となり、分布型流出モデルなどにそのまま適用するのは難しい。そこで解析解の利用が考えられる。リチャーズ式を何らかの仮定により線形化した解析解を導出することができれば、分布型流出モデルなどに適用しやすくなる。

２．研究の方針と目的

先行研究で用いられているリチャーズ式の解析解における初期条件と境界条件では、現実的な条件を設定することが難しい。具体的には湛水の発生前や地下水が存在している場合の条件設定ができない。そこで本研究では Tracy の研究[2]における解析解の導出を参考に、新たに水分拡散係数を導入し、境界条件と初期条件をより一般的な形に変更できる解析解を求めた。その解を用いて、先行研究と同様の条件と新たに地下水面を考慮した条件の二つのケースで解の挙動を検討する。さらに、リチャーズ式を満たすもっとも単純な解である級数解の第１項のみに着目した簡便な計算法について議論する。

３．解の導出

不飽和透水係数 K は飽和透水係数k_sと相対透水係数k_rの積で表される。

$$K = k_s \cdot k_r$$

ここで相対透水係数と有効飽和度S_eが等しい、

$$k_r = Se$$

という仮定と水分拡散係数が一定であるという二つの仮定を用いて線形化されたリチャーズ式は次式のように書ける。

$$\frac{\partial Se}{\partial t} = D\frac{\partial^2 Se}{\partial z^2} - \alpha\frac{\partial Se}{\partial z} \quad \left(\alpha = \frac{k_s}{\theta_s - \theta_r}\right) \quad (1)$$

tは時間、zは土壌上端からの深さ、θ_sは飽和体積含水率、θ_rは残留体積含水率である。この偏微分方程式を次のような初期・境界条件の下で解く。

$$B.C \quad S(0,t) = a,\ S(L,t) = b,\ I.C \quad S(z,0) = f(z)$$

Lは土壌の長さである。まず(1)式の同次形である、

$$D\frac{\partial^2 S'}{\partial z^2} - \alpha\frac{\partial S'}{\partial z} = 0$$

の解 S'は次のような形で書ける。

$$S' = A_1 + A_2 \cdot e^{\frac{\alpha}{D}z}$$

$$A_1 = \frac{b - ae^{\beta L}}{1 - e^{\beta L}}, A_2 = \frac{a - b}{1 - e^{\beta L}} \quad \left(\beta = \frac{\alpha}{D}\right)$$

次に新たな変数として、

$$u = S + S'$$

を導入し(1)式に代入すると新たな偏微分方程式として次式が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \alpha\frac{\partial u}{\partial z} \quad (2)$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad u(z,0) = f(z) - S'$$

(2)式の初期値境界値問題は変数分離法を用いて次のような解を求められる。

基本解　$Se = Ie^{-A^2 t + \frac{\beta z}{2}}\sin\frac{n\pi}{L}z + A_1 + A_2 \cdot e^{\beta z}$

一般解　$Se = \sum_{n=1}^{\infty}\left(I_n \cdot e^{-A^2 t + \frac{\beta z}{2}} \cdot \sin\frac{n\pi}{L}z\right) + A_1 + A_2 \cdot e^{\beta z}$

Sugawara　Yoshito,　Sayama Takahiro,　Takara　Kaoru
sugawara.yoshito.74v@st.kyoto-u.ac.jp

$$I_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left(f(z) - A_1 - A_2 \cdot e^{\beta z}\right) \cdot e^{-\frac{\beta z}{2}} \cdot \sin\frac{n\pi}{L} z\, dz$$

４．結果と考察

各パラメータの値は$\theta_s = 0.35, \theta_r = 0.034, k_s = 0.00034$ [cm/sec]，$L = 150$ [cm]，$D = 0.005, a = 1, f(z) = 0$とする。

$b = 0$ とした先行研究と同様に初期条件が土壌全体で乾燥していて、上端飽和と下端乾燥で境界条件が維持されるというケースの計算結果を図１に示す。縦軸は深さ、横軸は体積含水率である。このように先行研究と同じく、上端から水が浸透していく様子が見て取れる。

次に$b = 1$として土壌下端に地下水面があるという条件で計算を行った結果を図２に示す。地下水面からの水の吸い上げによる土壌の下層での水分量の増加を表現できている。

また発展として計算量を減らすため、級数解の第１項のみで解の挙動の計算を行った。初期条件以外は図２のケースと同様の条件とした。またIの値については、本来初期条件を考慮する議論が必要になる。ただここでは簡便のため現実的にとり得て変化のわかりやすい I=−0.0000013 とした（図３）。初期条件を任意に決めることができなくなったため、最初から浸透が下部まで達している状態から浸透が開始されたが、解の挙動自体は同様の形となった。

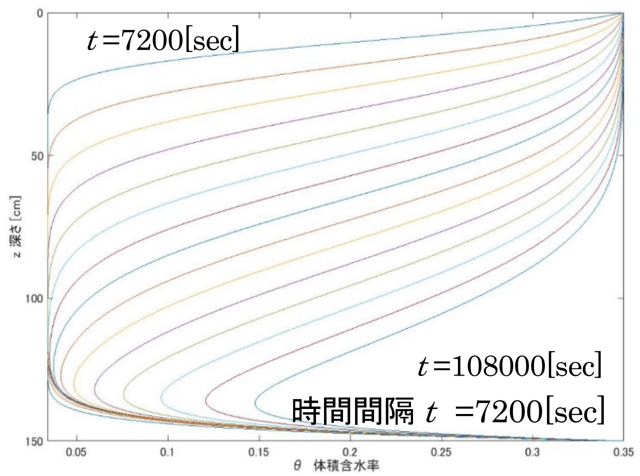

図２　地下水面を考慮した解の挙動

５．結論

一定水分量境界のリチャーズ式の解析解を導出することによって、地下水面を考慮した条件での浸透を表現できた。また級数を取らない単純な解でも、初期条件によっては適用の可能性が示唆された。

参考文献

[1] 佐山敬洋・小杉賢一朗・岩見洋一（2015）: 山体地下水の流動を表現する分布型降雨流出モデルの開発，土木学会論文集 B1(水工学) Vol.71 No.4, pp. 331-336.

[2] F. T. Tracy (2011): Analytical and Numerical Solutions of Richards' Equation with Discussions on Relative Hydraulic Conductivity. Hydraulic Conductivity – Issues Determination and Applications, pp. 203-222.

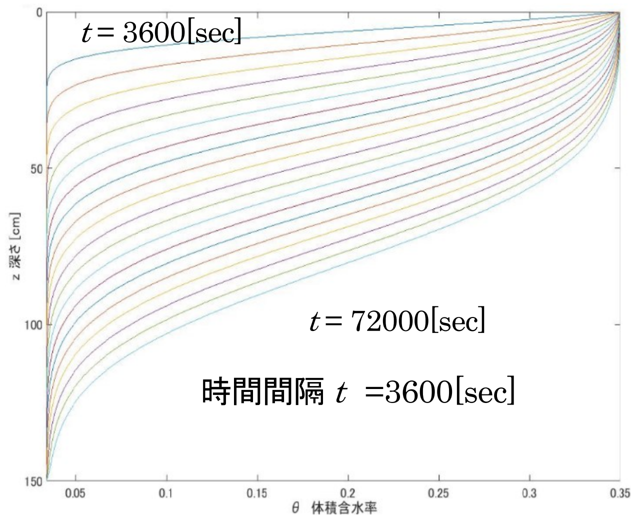

図１　上端のみ飽和の解の挙動

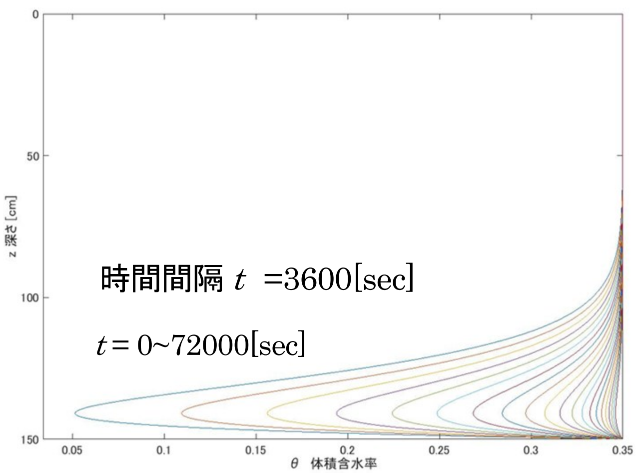

図３　級数第一項までの解の挙動