

第II部門

固有直交分解を用いた洪水氾濫モデルの縮約に関する研究

京都大学工学部

学生会員 ○友田成美

京都大学大学院工学研究科

正会員 市川 温

京都大学大学院工学研究科

正会員 萬 和明

京都大学大学院工学研究科

正会員 立川康人

1 はじめに 本研究では、氾濫計算の基礎式となる局所慣性方程式¹⁾に固有直交分解を適用し縮約モデルを導出する。この縮約モデルによって氾濫計算を行い縮約前のモデルによる氾濫計算結果と比較することで、縮約モデルの精度を検証するとともに、計算時間の短縮が可能かを検証する。

2 固有直交分解 固有直交分解とは、多変量データが持つ情報を少数個の変数に要約して分析を行う手法である。新しい変数を構築するために、固有直交分解では、データの分散が最大となる方向を探し出す。図1の x_1' がそれにあたり、この方向がデータの分布の特徴を最も効率よく表現できる軸となる。この軸の方向と一致する単位固有ベクトル $\mathbf{u}_1$ は第1基底と呼ばれる。この第1基底 $\mathbf{u}_1$ に直交する方向でデータの分散が最大となる方向を示す単位固有ベクトル $\mathbf{u}_2$ が第2基底で、第1基底の次に効率よく分布の特徴を表現する軸となる。

一般に、データの共分散行列の固有値を大きい順に $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$ とすると、その固有値に対応する固有直交ベクトルの正規直交系 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ が分散の大きい順にとった座標系となり、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ がそれぞれの方向の分散となっている。 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ の方向を主軸、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を主値という。このようにデータから基底を取り出し、観測値をその基底の線形結合で説明することを固有直交分解と呼ぶ。

3 氾濫計算モデル 本研究では、氾濫解析手法として以下の一次元局所慣性方程式を用いた。

<連続式>

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} = r \quad (1)$$

<運動方程式>

$$\frac{\partial M}{\partial t} + gh \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{gn^2 |M| M}{h^{7/3}} = 0 \quad (2)$$

ここで、 h は水深、 M は x 方向の単位幅流量、 H は水位($H = h + z$ 、 z は地盤高)、 r は降雨強度を表す。ま

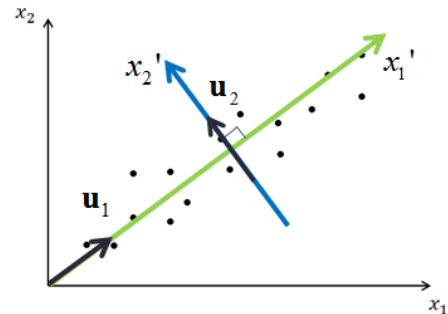


図1 第1、第2基底による射影

た、 g は重力加速度、 n はManningの粗度係数、 t は時間、 x は水平方向の空間座標である。計算の対象とする領域は、セル数が m の一次元の流れ場とする。

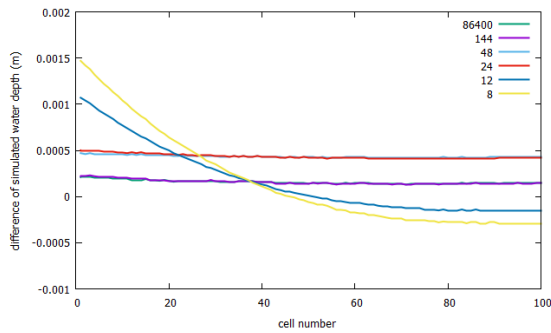
4 縮約モデルの導出 縮約前のモデルで行った24時間分の計算結果から10分間隔で水深と単位幅流量のデータを取り出し(それぞれ145個)、固有直交分解を適用して縮約モデルで用いる基底 Φ_h, Φ_M を抽出した。この基底を用いて(3)式のように、水深と単位幅流量を、それぞれの時間平均値 $\bar{\mathbf{h}}, \bar{\mathbf{M}}$ と基底で表す。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}^n \\ \mathbf{M}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_h \alpha^n \\ \Phi_M \beta^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{h}} \\ \bar{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

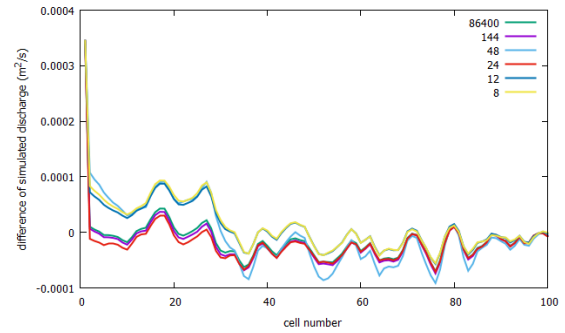
ただし、 α^n, β^n は時刻 n における、水深、単位幅流量の基底の係数をすべてまとめたものである。(1)式(2)式を数値的に解くため差分化し、さらに線形化した式に(3)式を代入し(4)式を得る。

$$\begin{bmatrix} \alpha^{n+1} \\ \beta^{n+1} \end{bmatrix} = \Phi^T K \Phi \begin{bmatrix} \alpha^n \\ \beta^n \end{bmatrix} + \Phi^T C + \Phi^T R \quad (4)$$

ここで、 C は定数列ベクトル、 R はその他の項をまとめた列ベクトルである。これが本研究で導出した縮約モデルである。この計算式を使うと、氾濫計算を $2m+1$ から $k_h + k_M$ (k_h, k_M はそれぞれ10個程度)まで大幅に減少した次元で行うことができる。また、 $\Phi^T K \Phi$ 、 $\Phi^T C$ 、は時間変化しない値によって構成される行列であるため、縮約された計算式を解く前に計算でき、計算負荷をさらに軽減することができる。

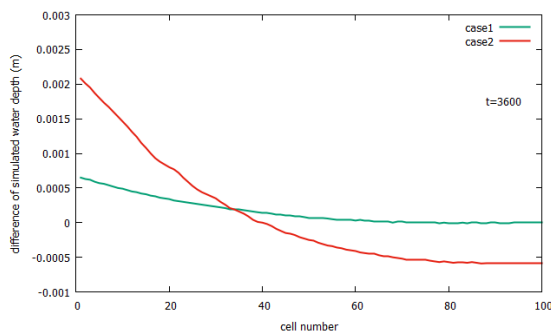


(a) 水深の計算値の差

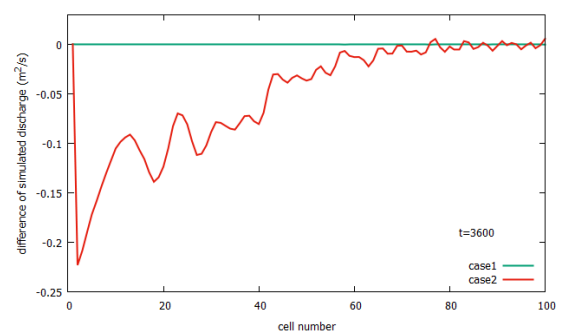


(b) 単位幅流量の計算値の差

図2 縮約モデルと元のモデルの計算値の差 (線形化の回数による比較)



(a) 水深の計算値の差



(b) 単位幅流量の計算値の差

図3 縮約モデルと元のモデルの計算値の差 (基底の個数による比較)

5 計算結果と考察 本研究では、一次元の仮想的な流れ場を想定してシミュレーションを行った。 x 軸方向のセル数は100、セルの大きさは10 m × 10 m、初期水深は1.0mで0.5m²/sの洪水流が領域上流端から流入するとした。縮約前のモデルと縮約モデルでの計算結果を比較する。

図2は縮約モデルと元のモデルの計算値の差を線形化の回数によって比較したものである。図2を参照すると、線形化を行う回数が多いほど縮約モデルの精度は高くなることがわかる。また、図3は縮約モデルと元のモデルの計算値の差を固有直交分解に用いた基底の個数によって比較したものである。Case1では合計20個、Case2では合計8個の基底を用いた。図3を参照すると、固有直交分解に用いる基底の数が多いほど、再現性は高くなることがわかる。さらに、表1、表2より、計算時間を短縮できているのがわかる。

6 まとめ 本研究では、固有直交分解による氾濫計算の縮約モデルを提案した。このモデルにより、縮約

表1 線形化の回数による計算時間の変化

線形化の回数 (秒)	86400	144	24	12
計算時間 (秒)	2274.24	14.11	10.97	10.68

表2 基底の個数による計算時間の変化

基底の数	20	8	縮約前のモデル
計算時間 (秒)	14.11	6.98	17.94

前のモデルでの計算結果を高い精度で再現できた。さらに、固有直交分解に用いる基底の数と計算式の線形化を行う回数を少なくすればするほど、計算時間は短縮されるが、計算結果の精度は低くなるということが明らかになった。

参考文献

- 1) Bates P. D., Horritt M. S., Fewtrell T. J.: A simple inertial formulation of the shallow water equations for efficient two-dimensional flood inundation modeling, Journal of Hydrology, 387, pp.33-45, 2010.
- 2) 市川温:洪水氾濫計算の縮約可能性の検証, 土木学会全国大会第70回年次学術講演会, II-217. 2015.