

1. はじめに

従来、流れ場の解析法として、Navier Stokes 方程式や浅水流方程式の質量・運動量保存を直接解く方法が発展してきたが、近年それとは別の解法として、流体现象を離散的な粒子の集まりと考え、分子粘性に基づいたボルツマン方程式を対象とした手法が注目されている。その一つに、格子ボルツマン法(Lattice Boltzmann Method, 以下 LBM)がある。LBM には計算効率がいい、アルゴリズムが簡単、複雑な境界条件を比較的簡単に扱うことができる、並列計算処理に適しているなどの利点があるといわれているが、河川工学の分野での適用例は少ない。そこで、本研究では、今後の河川流解析への応用を念頭に置いて LBM の基本的な特性について検討を行った。対象としたのは、2次元の Navier Stokes 方程式と浅水流方程式である。

2. 格子ボルツマン法

2.1 概要

LBM は、流体を格子点を移動する仮想粒子の集合体として仮定し、粒子の並進・衝突の時間発展を格子ボルツマン方程式により計算してマクロな流れの諸量を求めるメゾスケールの解析手法である。

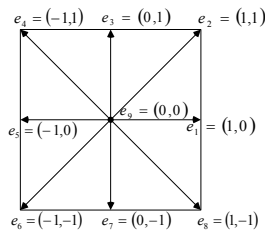


図-1 2次元9速度方向格子における粒子速度 e_α

2.2 2次元9速度モデル

本研究では、格子パターンに図-1 の 2次元9速度モデルを使用する。ここで、 $e_\alpha (\alpha = 1 \sim 9)$ は α 方向の粒子の速度ベクトルを表している。

2.3 LB 方程式

LBM は、粒子の並進と衝突の 2つのステップによって構成されている。並進ステップでは、粒子の速度方

向に隣接する格子点に移動し、衝突ステップでは、粒子分布が単一割合で局所平衡状態へ再配分される。これは 2次元9速度 LBM では次式のように表される。

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau}(f_\alpha - f_\alpha^{eq}) + \frac{\Delta t}{6e^2} e_{\alpha i} F_i \quad (1)$$

ここで、 f_α は粒子の分布関数、 τ は緩和時間係数、 f_α^{eq} は局所平衡分布関数、 t は時間、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$ 、 F_i は i 方向の外力成分を表している。

2.4 単位緩和時間係数 τ

単位緩和時間係数 τ と流体の動粘性係数 ν との間には、以下のような式が成り立つ。

$$\nu = \frac{\Delta x^2}{6\Delta t} (2\tau - 1) > 0 \quad (2)$$

2.5 局所平衡分布関数

局所平衡分布関数とは、ある空間において、平衡状態になったときの粒子数の分布を表す関数であり、対象とする流れの方程式によって異なる。

浅水流方程式の場合：

$$f_\alpha^{eq} = \begin{cases} h - \frac{5gh^2}{6e^2} - \frac{2h}{3e^2} u_i u_i, & \text{for } \alpha = 9 \\ \frac{gh^2}{6e^2} + \frac{h}{3e^2} e_{\alpha i} u_i + \frac{h}{2e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j - \frac{h}{6e^2} u_i u_i, & \text{for } \alpha = 1, 3, 5, 7 \\ \frac{gh^2}{24e^2} + \frac{h}{12e^2} e_{\alpha i} u_i + \frac{h}{8e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j - \frac{h}{24e^2} u_i u_i, & \text{for } \alpha = 2, 4, 6, 8 \end{cases} \quad (3)$$

Navier Stokes 方程式の場合：

$$f_\alpha^{eq} = \begin{cases} \frac{4}{9} \rho \left(1 + \frac{3}{e^2} e_{\alpha i} u_i + \frac{9}{2e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j - \frac{3}{2e^2} u_i u_i \right) & \text{for } \alpha = 9 \\ \frac{1}{9} \rho \left(1 + \frac{3}{e^2} e_{\alpha i} u_i + \frac{9}{2e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j - \frac{3}{2e^2} u_i u_i \right) & \text{for } \alpha = 1, 3, 5, 7 \\ \frac{1}{36} \rho \left(1 + \frac{3}{e^2} e_{\alpha i} u_i + \frac{9}{2e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j - \frac{3}{2e^2} u_i u_i \right) & \text{for } \alpha = 2, 4, 6, 8 \end{cases} \quad (4)$$

2.6 マクロな性質との関係

LB 方程式では流体のマクロ変数を粒子分布関数 $f_\alpha(\mathbf{x}, t)$ や各格子方向の速度ベクトル $e_{\alpha i}$ とマクロ変数の間に以下のような関係が成り立つ。即ち、N-S 方程式では

$$\rho = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(x,t), \quad u_i(x,t) = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} f_{\alpha}(x,t) \quad (5, 6)$$

また、浅水流方程式では、

$$h(x,t) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(x,t), \quad u_i(x,t) = \frac{1}{h(x,t)} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} f_{\alpha}(x,t). \quad (7, 8)$$

3. キャビティー流れの計算比較

3.1 概要

上方壁のみを一定の速度で右方向に動かし、それ以外は固定し、内部の流体の動きの様子を確認する。このとき、左側壁、右側壁、下側壁には、No-Slip 条件を使用し、格子数は 64×64 , 129×129 , 258×258 、レイノルズ数は $Re=100, 400, 1000$ とした。格子数の違い、レイノルズ数の違いによる変化の確認を行った。今回は、Navier Stokes 方程式と浅水流方程式を使用して計算を行った。また、全ての場合において、 $e = \Delta x / \Delta t = 10$ とし、浅水流では水深 $3m$ とした。また、キャビティーの比較の対象としてよく用いられる Ghia の結果¹⁾との比較を行った。

3.2 結果および考察

図-2 には格子数が 129×129 の場合の $Re=100$ と $Re=1000$ における中心線上の速度分布を Ghia の結果との比較をし、図-3 には、 $Re=1000$ における格子数が 129×129 の場合の流線のコンターを示す。図-2 より、浅水流方程式、N-S 式の結果はともに、Ghia の結果とほぼ一致している。図-3 より、浅水流方程式、N-S 式の結果はほぼ一致している。N-S 式と浅水流方程式という、偏微分方程式の性質の異なる2つの方程式をLBMでは同じ手順で解けることが確認できた。但し、 $Re=1000$, 64×64 の格子では上境界付近で不安定となった。

4. 角柱群間の流れ

LBM で複雑な境界条件を扱えることを確認するために、N-S 方程式を対象として、角柱群間の流れの解析を行った。図-4 には、角柱を規則的あるいは不規則に並べた場合の渦度のコンターの結果を示す。(a)のように前の障害物によってできた渦が後ろの障害物に干渉していることが確認できる。また、角柱の存在は、任意のメッシュの属性(wall or water)を変更するだけで与えることができる点が LBM の特徴であるため、(b)のように不規則な配置であっても容易に設定することができる。また、設置の仕方によっては、(c)のように周期的な流れを生み出すことができることが確認できる。

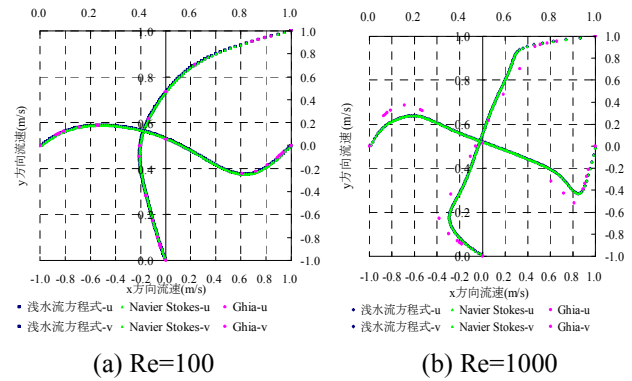


図-2 解く方程式の違いによる中心線上の速度分布

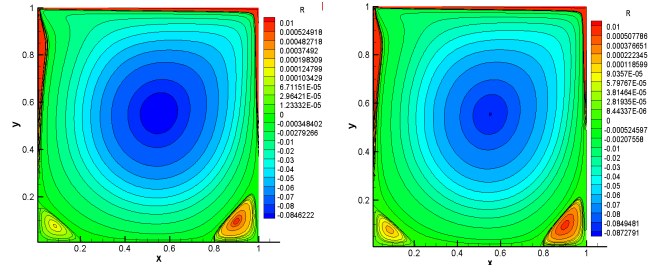


図-3 $Re=1000$ における流線のコンター

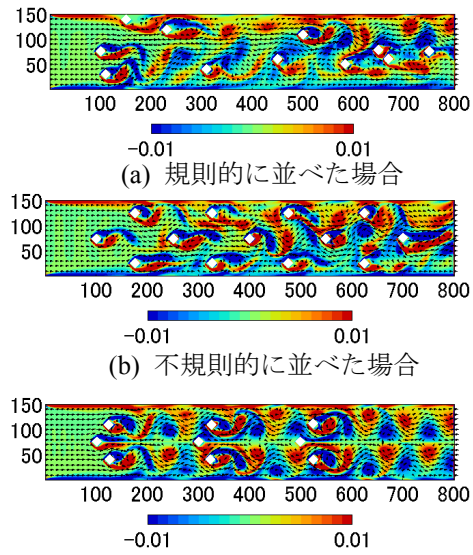


図-4 直線水路に角柱を置いたときの渦度

5. おわりに

Navier Stokes 方程式と浅水流方程式を、LBM という統一的方法で解くことができた。本研究での LBM は基本的な検討レベルではあるが、流れ場を解析するツールとして有用であることが確認できた。

参考文献

1) U.Ghia, K.N.Ghia, C.T.Shin : High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, Journal of Computational Physics 48, 387-411, 1982.