第I部門　　　多変量時変ARモデルによる固有振動数の変動評価

大阪大学大学院工学研究科　学生員　○松岡弘大
大阪大学大学院工学研究科　正会員　　貝戸清之

1. はじめに

鉄道橋における列車走行時の共振現象は重要な工学的課題の一つである．列車走行時の共振現象は多数連結された車両による規則的加振周期と橋梁の固有振動数が近接することで発生する．このとき，列車走行時の橋梁には列車重量が加わっているために，固有振動数は見かけ上低下する．これまで，橋梁の見かけ上の固有振動数の変化量を明らかにするために数値計算を利用した検討がなされているものの[1)]，実橋梁における検証は分析上の問題によりほとんど実施されていない．以上の問題意識に基づき，本研究では固有振動数の見かけ上の変動を評価することを目的とし，パラメータの時間的変化を許容した多変量ARモデル（TV-VARモデル）を導出するとともに，モデル推計手法の構築を行う．以下，2.でTV-VARモデルを，3.で数値計算例への適用結果についてそれぞれ述べる．

2. TV-VARモデル

(1) VARモデル

N自由度離散系の構造物の運動方程式は，ARMAモデルにより表現することが可能である．さらにARMAモデルは以下に示すARモデルで近似することができる[2)]．

$$y(m) = a_0 + \sum_{j=1}^{p} A_j y(m-j) + \varepsilon(m) \qquad (1)$$

なお，$y(m)$は離散時点mのN変量観測応答ベクトル，A_jはj次のAR行列，εは平均ベクトル0，分散共分散行列Σ_εの正規白色雑音に従う．

さらに，式(1)は，

$$y(m) = Z(m)\alpha + \varepsilon(m) \qquad (2)$$

と回帰モデルとして表現することが可能である．このとき，$Z(m)$は$y(m)$に影響を及ぼす$y(m\text{-}j)$で構成される行列，αはAR係数行列により構成される特性項である．

(2) TV-VARモデル

いま，構造物の応答に見られる周期成分の情報は式(2)中のαにより表現される．すなわち，固有振動数に代表される周期情報が時間の経過とともに変動する場合にはαに時間的変動を導入する必要がある．そこで本研究では，列車走行時の固有振動数の時間関数が連続となることを考慮して，

$$\alpha(m+1) = \alpha(m) + u(m) \qquad (3)$$

のランダムウォーク過程を導入する．なお，εは平均ベクトル0，分散共分散行列Σ_uの正規白色雑音に従う．これにより，時系列の周期情報は1期前の情報を参照しながらも時間の推移とともに確率的に変動することが可能となる．

(3) TV-VARモデルと振動特性

以上のモデルと固有振動数，モード減衰比，振動モード形といった振動特性の関係を確認しておく．固有振動数ωとモード減衰比ξは，

$$\det(I\lambda(m) - \Phi(m)) = 0 \qquad (4)$$

の関係より得られる固有値λを用いて，

$$\omega = \frac{1}{\Delta t}\{\mathrm{Re}(\ln\ \lambda)^2 + \mathrm{Im}(\ln\ \lambda)^2\}^{\frac{1}{2}} \qquad (5)$$

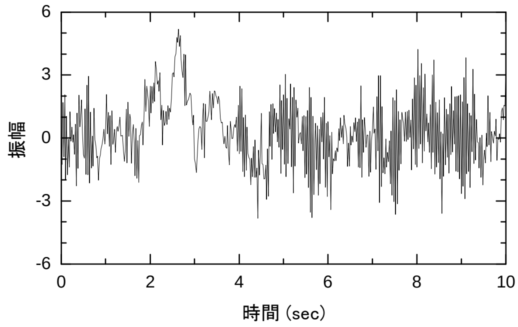
$$\varsigma = -\mathrm{Re}(\ln\ \lambda)^2 / \{\mathrm{Re}(\ln\ \lambda)^2 + \mathrm{Im}(\ln\ \lambda)^2\}^{\frac{1}{2}} \qquad (6)$$

により算出される．なお，Φは式(1)の可観測標準形における可観測行列である．

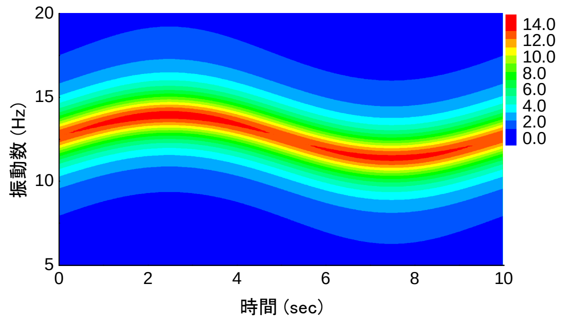
(4) TV-VARモデルの推計

TV-VARモデルは膨大な数の未知パラメータを有するうえに，それらのパラメータは階層的に相互依存している．本研究ではこのようなモデルの未知パラメータを推計する手法として階層ベイズ推計を提案する．階層ベイズ推計ではパラメータ間の依存性をシュミレーション・スムーザで，階層性を事前分布の階層化により表現することで，通常のベイズ推計の枠組みの中で推計値を事後分布として算出することができる．さらに，本研究で用いるTV-VAR

Kodai MATSUOKA and Kiyoyuki KAITO
k-matsuoka@civil.eng.osaka-u.ac.jp

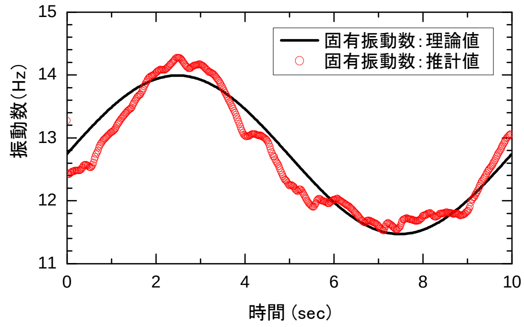


(a)　時系列

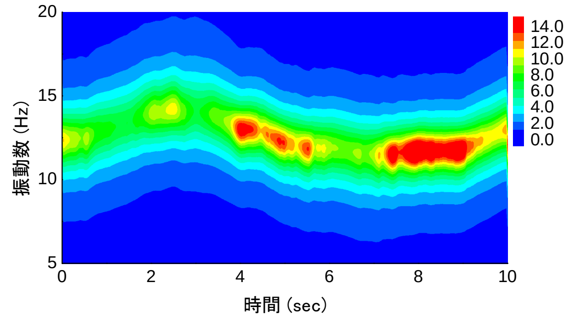


(b)　時間周波数

図-1 数値計算により算出した時系列と時間周波数



(a) 固有振動数の推計結果



(b) 時間周波数の推計結果

図-2 TV-VAR モデルの適用結果

モデルは正規分布を基本として構成された確率モデルであるために，効率的に事後分布をサンプリング可能なギブスサンプラーを利用することが可能である．ギブスサンプラーを用いるに際して，本研究では各未知パラメータの事前分布として，AR 係数行列に式(2)を，その他の未知パラメータには逆ウィシャート分布を設定している．

3. 数値計算例への適用

(1) 数値計算の方法

時系列は，時系列モデル

$$y(m)=-(q_1+q_2)y(m-1)+q_1q_2*y(m-2)+\varepsilon(m) \quad (7)$$

に従って数値的に発生させた．なお，*は複素共役を表す．また，q_1は，

$$q_1=l\cdot\exp\left\{\frac{i}{2\pi}\left(A_\omega\sin\left(\frac{2\pi\Delta}{\omega}m\right)+B_\omega\right)\right\} \quad (8)$$

に従い，q_2 は q_1 の指数内を負としたものである．本研究では Z 座標上の中心半径 l=0.85，時系列の時間刻み Δ=0.02[sec]，時間長 T=6[sec]，サンプル数 M=300，固有振動数の変動周期 ω=6[sec]，中心固有振動数 B_ω=10[Hz]，固有振動数の変動幅 A_ω=2[Hz]と設定した．作成した時系列と理論的な時間周波数を**図-1** に示す．

(2) 適用結果

図-2 に TV-VAR モデルの推計結果から算出した固有振動数と時間周波数を示す．固有振動数における推計値と理論値の差は最大で 0.635Hz（平均の 6.35%）となっており，推計精度としては問題ないと考えられる．なお，全時点での平均誤差は 1.70%であった．同図(b)には推計した時間周波数を示しているが，スペクトル形状まで理論値と整合的な推計結果が得られていることがわかる．

4. おわりに

本研究では，固有振動数の見かけ上変動を評価するための方法論として，周期情報の時間的な変動を許容した TV-VAR モデルを導出するとともに，階層ベイズ推計に未知パラメータ推計する方法論を構築した．また，数値計算事例のみではあるが，その有効性を確認した．今後，実橋梁への適用を実施していく予定である．

【参考文献】

1) 松浦彰夫：高速鉄道における橋桁の動的挙動に関する研究，土木学会論文集，Vol.256，pp.35-47，1976.
2) モード解析ハンドブック編集委員会：モード解析ハンドブック，コロナ社，2000.